



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Facultad de ciencias experimentales
Departamento de Estadística y Matemática aplicada

***MODELO DE PREDADOR-PRESA.
APLICACIONES AL CONTROL BIOLÓGICO.***

TESIS DOCTORAL

MANUEL GÁMEZ CÁMARA

1999

TESIS DOCTORAL 51

MODELO DE PREDADOR-PRESA. APLICACIONES AL CONTROL BIOLÓGICO.

MANUEL GÁMEZ CÁMARA

Esta Tesis Doctoral, dirigida por el Doctor D. Antonio R. Tineo Bello, Dr. D. Ramón Carreño Carreño y Dr. D. Tomás Cabello García fue defendida, en La Universidad de Almería el 9 de Julio de 1998 ante un Tribunal compuesto por los siguientes miembros:

Presidente: Dr. D. Victoriano Ramírez González
Vocales: Dr. D. Antonio Cañada Villar
Dr. D. Manuel Delgado Delgado
Dr. D. Alfredo Lacasa Plasencia
Secretario: Dr. D. Antonio S. Andújar Rodríguez

Obteniendo la calificación de Sobresaliente cum Laude por unanimidad.

© **Servicio de Publicaciones**
Universidad de Almería, 1999

ISBN:
84-8240-260-9

Deposito Legal:
AL-239-1999

Programación e infografía:
IRISOFT C.B.

Agradecimientos

Es difícil expresar en pocas líneas las múltiples muestras de apoyo y estímulo que he tenido durante el desarrollo de esta memoria, y sin las cuales la realización de la misma hubiese sido imposible.

En primer lugar, al Profesor Antonio Rafael Tineo Bello, de la Universidad de los Andes de Venezuela, quien con su eficaz codirección ha hecho posible la elaboración de los resultados matemáticos de esta Memoria, y sobre todo por su sincera amistad y apoyo personal.

Al Profesor Ramón Carreño Carreño, quien con su amistad hizo posible mi interés por los modelos matemáticos y su aplicación al estudio de la dinámica de poblaciones.

Al Profesor Tomas Cabello García, el cual, a pesar de sus múltiples ocupaciones, ha hecho posible que pueda comprender, aunque mínimamente, el difícil y fascinante campo de la dinámica de poblaciones plaga, el control biológico...y sus aplicaciones matemáticas dentro de la ecología práctica.

A D. Federico García Jiménez Resp. Técnico y de Formación de Novartis BCM España S.A. por su amabilidad para proporcionarme diversos datos de campo empleados en algunos de los supuestos prácticos.

A los Profesores Antonio Andujar y Jose Caceres por su inestimable asesoramiento en algunos temas informáticos y su aliento en momentos en los que las fuerzas flaquean, y en general a todos los compañeros del Departamento de Estadística y Matemática Aplicada de la Universidad de Almería que han facilitado este trabajo con su estímulo.

No quisiera terminar estas líneas sin mostrar mi agradecimiento a mi familia y a mis amigos sobre todo a María del Mar y Alfonso, que aunque este último por desgracia ya no está entre nosotros, han sido sin duda alguna, los que han hecho posible desarrollar en mi la capacidad de lucha necesaria para poder terminar esta memoria.

Sinceramente a todos, muchas gracias.

A MIS HIJOS
ANGEL Y MARIA DEL MAR

Contenido

Resumen	1
1 Preliminares	5
1.1 Introducción	5
1.2 Teoremas Generales sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias	7
1.3 Teorema de Kamke	11
1.4 Sistemas Periódicos	15
1.5 Ecuación Logística	20
2 Existencia del Atractor Global	27
2.1 Introducción	27
2.2 Atractor Global	29
2.3 Sistemas Cooperativos	40
3 Continuidad del Atractor	53

3.1	Introducción	53
3.2	Teorema de Continuidad.	56
3.3	Caracterización del Atractor global	69
4	Modelo Depredador-Presa.	75
4.1	Introducción	75
4.2	Esquemas Iterativos.	78
	Resultado Colateral	89
5	Aplicaciones	95
5.1	Introducción	95
5.2	Casos Concretos	98
5.3	Aplicaciones de los modelos Presa-Depredador en cultivos hortícolas.	106
5.3.1	Aplicación al caso de Orius-Frankliniella	109
5.3.2	Aplicación al caso de Bemisia-Helicoverpa y Macrolophus.	114
5.4	Anexo	117
	Apéndice	121
A.1	Lema de Barbalat	121
A.2	Teorema de la Función Implícita	123
	Bibliografía	127

Resumen

Los modelos depredador-presa han desempeñado un papel muy importante en el estudio de muchas poblaciones donde aparece una determinada relación entre ellas. Con todo ello podemos decir que forman uno de los temas más interesantes y dominantes dentro de la ecología.

Uno de los primeros trabajos sobre la dinámica de poblaciones lo podemos encontrar en " *Essay on the principle of population* " de Thomas Malthus (1798), donde argumenta que mientras las poblaciones crecen logarítmicamente, los recursos de los que dependen son constantes o sólo crecen aritméticamente, de esta manera la demanda de recursos debe de exceder al suministro y el crecimiento poblacional, dependiente de la fuente de suministro, debe entonces cesar. Así, Thomas Malthus se puede considerar como uno de los pioneros de la ecología, aunque su modelo sobre el crecimiento de las poblaciones, no sea realista ya que un crecimiento ilimitado no se produce en la naturaleza, debido a la existencia de múltiples limitaciones: físicas, biológicas, etc.

Cuarenta años más tarde, Verhulst (1838) en su trabajo " *Principle of*

Population ", formula un modelo en el que trata de corregir el crecimiento Malthusiano con un factor freno en el modelo, y que se puede considerar como el germen de todos los modelos conocidos como logísticos,

$$\frac{dN}{dt} = aN \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

donde N es la densidad de la población, a la tasa percapita de cambio o la tasa de aumento intrínseco y K la densidad de equilibrio a menudo llamada la capacidad de carga del entorno.

Posteriormente, y a partir del auge que estaban adquiriendo todos estos temas, Lotka (1925) y Volterra (1928) realizan uno de los grandes avances en la dinámica de poblaciones, donde proponen el primer modelo depredador-presa que en lugar de ser obtenido por extensión de la ley logística a dos especies, adoptan el principio químico de acción de masas. En otras palabras, en dichos trabajos se asume que la respuesta de la población será proporcional al producto de sus biomásas. A partir de aquí son múltiples los avances que en torno a este tema y en general sobre la dinámica de poblaciones se han llevado a cabo. En consecuencia, en esta memoria realizamos un estudio de los Sistemas de Kolmogorov,

$$x'_i = x_i f_i(t, x); \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad 1 \leq i \leq n$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, y T -periódica en t . Obteniendo una serie de resultados , para un caso particular de ellos, que posteriormente utilizamos para analizar un determinado modelo depredador-presa. Por ultimo como aplicación, tratamos de modelizar algunos datos reales de campo.

En el Capítulo 1 se presentan los resultados básicos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias resaltando los teoremas sobre la dependencia continua de las condiciones iniciales y parámetros, así como una serie de proposiciones y corolarios que tratan de adecuar diferentes situaciones del Teorema de Kamke a las condiciones en las que posteriormente nos vamos a desenvolver. Por último se presentan dos secciones relativas a un pequeño estudio sobre los sistemas periódicos y la conocida ecuación de tipo logístico.

El Capítulo 2 pretende formalizar el concepto de "*atractor global*" de un sistema de ecuaciones diferenciales sobre el que nos planteamos bajo qué condiciones tenemos garantizada su existencia, igualmente definimos las condiciones que identificarán a los que llamaremos "*sistemas cooperativos*", en torno a los cuales se desarrolla gran parte de este trabajo, y donde concretamente conseguimos comprobar como las condiciones para la existencia del atractor global, se reducen para este tipo de sistemas.

El Capítulo 3 constituye el bloque fundamental de este trabajo y sin duda en él se encuentran los resultados que han generado un mayor grado de dificultad para su obtención, de manera más precisa probamos un teorema de continuidad para el atractor global del sistema diferencial en el cual generalizamos para el caso cooperativo un resultado planteado por el prof A. Tineo en "*X Escuela Venezolana*"[63]. De igual forma, aprovechando esta información, en el Corolario 3.3.2 conseguimos dar una caracterización para el atractor global.

En el Capítulo 4 realizamos un estudio sobre un modelo depredador-presa con n -presas y un depredador donde, para poder utilizar los resultados de los

capítulos anteriores, consideramos que las presas en ausencia del depredador se desarrollan bajo un sistema cooperativo. También en él, siguiendo la idea planteada por López-Gómez, Ortega y A. Tineo en [48], establecemos un esquema iterativo para este modelo, encontrando bajo determinadas condiciones un atractor global del sistema.

En el Capítulo 5, exponemos de manera precisa las condiciones necesarias para que los resultados obtenidos se verifiquen en el caso particular de Lotka-Volterra autónomo. También se estudia la aplicación de los modelos depredador-presa a la dinámica de poblaciones de especies plagas en cultivos hortícolas, en concreto se han elegido dos cultivos: pimiento y tomate, así como tres importantes grupos de especies plaga: la "*heliothis de tomate*", la "*mosca blanca*" y el "*trips occidental*", tratando de modelizar su desarrollo con un depredador por medio de un modelo depredador-presa con reproducción en el depredador.

Para finalizar el presente resumen, hacemos notar que el esquema iterativo desarrollado en esta memoria, es perfectamente válido para obtener de manera colateral el resultado sobre la persistencia en media para un sistema competitivo conseguido en [25], lo cual lo hemos desarrollado en un capítulo intermedio que hemos llamado "*Resultado Colateral*".

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

Es objetivo de este capítulo, proporcionar de una manera rápida las principales nociones y conceptos iniciales básicos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias que serán necesarios en el desarrollo de esta memoria. La mayoría de ellos son resultados muy conocidos y por tanto los podemos encontrar en cualquier manual de E.D.O., pero que nosotros hemos adecuado a la notación empleada para la elaboración de este trabajo. También presentamos algunos resultados que se obtienen a partir del conocido Teorema de Kamke, pero igualmente tratamos de adaptarlos a nuestras condiciones para facilitar las referencias que sobre ellos haremos en las demostraciones. Por último se estudian algunas propiedades de interés para el caso de sistemas periódicos y de la ecuación de logística.

Recordamos que para $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función definida en un abierto no vacío $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, y $(t_0, x_0) \in W$, se denomina Problema de Valores Iniciales

(P.V.I.) o de Cauchy, al problema mediante el cual se determina una función $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que,

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad \forall t \in I.$$

Este es un problema que se encuentra fuertemente ligado con los conocidos teoremas del punto fijo ya que en muchos casos la existencia de una solución, se reduce a la determinación de puntos fijos para un cierto operador.

Para poder obtener estos teoremas de puntos fijos es fundamental que la función que determina dichos operadores verifique una serie de propiedades. Así, si f es continua, el Teorema de Cauchy-Peano permitirá garantizar la existencia de soluciones, mientras que si f es continua y lipschitziana respecto de x , se obtiene un operador contractivo que nos llevará al Teorema de Picard-Lindelof para la existencia y unicidad de las soluciones.

Así, según lo expuesto anteriormente será básico la hipótesis de lipschitzianidad, la cual como en principio es bastante restrictiva, lo llevaremos a la de "*localmente lipschitziana*" que lógicamente es más débil que la de "*globalmente lipschitziana*", pero que será suficiente para aplicar los teoremas de existencia y unicidad de soluciones.

Por tanto, podría ser interesante realizar una sección sobre el Espacio de las Funciones Continuas recordando alguno de los teoremas referentes a las mismas, sin embargo hemos decidido omitirla ya que la podemos encontrar en cualquier manual de análisis matemático. En cambio, sí hemos querido expresar un resultado importante para cuando la convergencia de las funciones es uniforme, el cual será utilizado en muchas de las demostraciones y que

presentamos en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1. (*Teorema de Intercambio de Límites con Derivadas*)

Sea $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una sucesión de funciones diferenciables tales que,

$$f_n \rightarrow f \quad \text{y} \quad f'_n \rightarrow F \quad \text{uniformemente en subconjuntos compactos de } I,$$

para ciertas funciones $f, F : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Entonces f es diferenciable y además se verifica que $f' = F$.

1.2 Teoremas Generales sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

En esta sección enunciamos algunos resultados generales sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (E.D.O.) relativos a la existencia y unicidad de las soluciones, dependencia continua de las condiciones iniciales... que, como hemos dicho en la introducción, podemos encontrar en cualquier libro de E.D.O., pero que hemos optado por incluirlos en este capítulo para facilitar la lectura y la adecuación a la notación de este trabajo. En particular hemos usado Hale (1980), Hartman (1982), Coddington-Levinson (1984), Amann (1990) y Novo (1995).

Definición 1.2.1. Dado $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ $(t, x) \mapsto f(t, x)$, diremos que es localmente lipschitziana en x si para cada $(t_0, x_0) \in W$ existen constantes positivas ϵ y L tales que,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|,$$

si

$$(t, x), (t, y) \in W; |t \Leftrightarrow t_0| < \epsilon, \|x \Leftrightarrow x_0\| < \epsilon, \|y \Leftrightarrow x_0\| < \epsilon.$$

Proposición 1.2.2. *Sea $f : W \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Supongamos que f admite todas las derivadas parciales $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : W \rightarrow \mathbb{R}$ $i, j = 1, \dots, n$ continuas en W . Entonces f es localmente lipschitziana respecto de $x = (x_1, \dots, x_n)$.*

Sea $(t_0, x_0) \in W$, se dice que $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ es una solución del P.V.I.

$$x' = f(t, x); \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.1)$$

si verifica:

- i) u es una función diferenciable.
- ii) $u(t_0) = x_0$.
- iii) $(t, u(t)) \in W \quad \forall t \in I$.
- iv) $u'(t) = f(t, u(t)) \quad \forall t \in I$.

Para funciones localmente lipschitzianas, como es el caso de las que fundamentalmente estudiaremos, se tiene el siguiente resultado sobre la existencia y unicidad de la solución para el problema (1.1).

Teorema 1.2.3. *(Picard-Lindelöf) Supongamos que $f(t, x)$ es continua y localmente lipschitziana en x . Entonces (1.1) posee una solución, además, si $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $v : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ son soluciones de (1.1), entonces $u(t) = v(t)$ para todo $t \in I \cap J$.*

Del teorema anterior se sigue que el P.V.I. (1.1) posee una solución u de dominio máximo, es decir, el $dom u$ contiene al dominio de cualquier otra

solución de (1.1), entonces se dice que u es solución maximal. Además para ella podemos tener los siguientes resultados.

Teorema 1.2.4. *Sea $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de (1.1). Si $I = (\alpha, w)$ tal que $w < +\infty$ y suponemos que,*

- i) *Existe $x_* := \lim_{t \rightarrow w^-} u(t)$*
- ii) *$(w, x_*) \in W$*

Entonces existe una solución $v : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ de (1.1), tal que $(\alpha, w + \epsilon) \subset J$ para algún $\epsilon > 0$. Es decir, v es una prolongación estricta de u a la derecha.

Corolario 1.2.5. *Sea $u : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de (1.1) y supongamos que existe un compacto $K \subset W$ tal que $(t, u(t)) \in K \quad \forall t \in I$. Entonces u posee una extensión estricta a la derecha.*

Con todo lo ya expuesto, podemos decir que el problema (1.1) cuando está en las condiciones del Teorema 1.2.3. posee una única solución que además depende de la condición inicial (t_0, x_0) . Por tanto podemos llamar $u(t, t_0, x_0)$ a la única solución de (1.1) que verifica dicha condición inicial.

Teorema 1.2.6. *(Dependencia Continua de las Condiciones Iniciales.) Sea $u(t, t_0, x_0)$ la solución de (1.1) y sea $I(t_0, x_0)$ su dominio de definición maximal. Se considera el conjunto,*

$$D = \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; (t_0, x_0) \in W, t \in I(t_0, x_0)\}.$$

Entonces se cumple:

- i) *D es abierto.*
- ii) *$u : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $(t, t_0, x_0) \mapsto u(t, t_0, x_0)$ es continua.*

Este resultado se aplica con frecuencia de la siguiente manera.

Corolario 1.2.7. *Sea (t_k, x_k) una sucesión de elementos de W , convergente a un punto $(t_0, x_0) \in W$ y sea u_k la solución del problema,*

$$x' = f(t, x); \quad x(t_k) = x_k.$$

Si llamamos u a la solución de (1.1) y suponemos $[a, b] \subset \text{dom}(u)$. Entonces existe un entero $k_0 \geq 1$ tal que $[a, b] \subset \text{dom}(u_k)$ para $k \geq k_0$ y además,

$$u_k \rightarrow u(t) \text{ cuando } k \rightarrow +\infty \text{ uniformemente en } [a, b].$$

De forma análoga tenemos un resultado, también importante, sobre la dependencia continua de la solución sobre los parámetros de la función.

Teorema 1.2.8. *Sea Λ un espacio métrico y $F : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua definida en un abierto $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$ tal que $F(t, x, \lambda)$ es localmente lipschitziana en x , de manera uniforme respecto de λ .*

Dado un punto $(t_0, x_0, \lambda) \in W$ denotamos por $u(t, t_0, x_0, \lambda)$ a la solución del problema,

$$x' = F(t, x, \lambda); \quad x(t_0) = x_0,$$

y sea $I(t_0, x_0, \lambda)$ su dominio de definición máxima. Entonces

- i) El conjunto $D = \{(t, t_0, x_0, \lambda) \in \mathbb{R} \times W; t \in I(t_0, x_0, \lambda)\}$ es abierto.*
- ii) La función $u : D \rightarrow \mathbb{R}^n; (t, t_0, x_0, \lambda) \mapsto u(t, t_0, x_0, \lambda)$; es continua*

Teorema 1.2.9. *Sea $f : W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua donde además existe y es continua $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$. Entonces si $u(t, t_0, x_0)$ es la solución*

de (1.1), se verifica que es diferenciable con continuidad respecto a t, t_0, x_0 en su dominio de definición. Más aún, $u_{x_0}(t, t_0, x_0)$ es la matriz fundamental del sistema lineal,

$$y' = f_x(t, u(t, t_0, x_0))y, \quad y(t_0) = \text{Identidad}.$$

1.3 Teorema de Kamke

En esta sección presentamos unos resultados, que son una adaptación del conocido Teorema de Kamke [43] a la notación y las propiedades sobre las que vamos a desarrollar esta memoria.

Para poder expresarnos correctamente necesitamos recordar algunas definiciones.

Definición 1.3.1. *Un sistema $x' = f(t, x)$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice cooperativo si $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ es creciente respecto a x_j para todo $j \neq i$, $1 \leq i, j \leq n$.*

Definición 1.3.2. *Dado un conjunto de índices $I = \{1, \dots, n\}$ diremos que S, T determinan una descomposición de I si $I = S \cup T$ con $S \cap T = \emptyset$, y S, T son no vacíos.*

Definición 1.3.3. *El sistema $x' = f(t, x)$, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice irreducible, si dada cualquier descomposición S, T de $I = \{1, \dots, n\}$ existe $(i, j) \in S \times T$ tal que f_i es estrictamente creciente en x_j .*

Los resultados que vamos a presentar necesitan que el sistema sea cooperativo e irreducible por tanto, aunque la nomenclatura usual es la expresada en

las definiciones anteriores, nosotros hemos optado por simplicidad el denominar " *sistema cooperativo* " al que verifica las dos condiciones (cooperativo e irreducible).

Teorema 1.3.4. Sean $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones continuas con $f \leq g$, y g localmente lipschitziana. Supongamos que u, v son soluciones de $x' = f(t, x)$, $x(0) = x_0$; $y' = g(t, y)$, $y(0) = y_0$ respectivamente. Si el sistema determinado por g es cooperativo y además $x_0 \leq y_0$, entonces $u \leq v$ en $\text{dom}(u) \cap \text{dom}(v) \cap [0, +\infty)$.

Demostración.

Caso 1. Supongamos $x_0 < y_0$ y $f < g$; entonces $u < v$. Para probar esta afirmación razonamos por reducción al absurdo, por tanto debe de existir $t_1 > 0$ de manera que,

$$u(t) < v(t) \forall t \in [0, t_1); \quad u_i(t_1) = v_i(t_1) \text{ para algún } i \in I = \{1, \dots, n\}$$

de donde deducimos que $u'_i(t_1) \geq v'_i(t_1)$ lo que implica

$$f_i(t_1, u(t_1)) \geq g_i(t_1, v(t_1)). \quad (1.2)$$

Aquí $(f_1, \dots, f_n), (g_1, \dots, g_n)$ denotan las componentes de f y g respectivamente.

Tomamos $S = \{i \in I; u_i(t_1) = v_i(t_1)\}$, $T = \{j \in I; u_j(t_1) < v_j(t_1)\}$ es claro que S, T determinan una descomposición de I , además $T \neq \emptyset$ ya que de lo contrario tendríamos que $u_i(t_1) = v_i(t_1) \forall i \in \{1, \dots, n\}$, de donde razonado de manera análoga a como se hizo para conseguir (1.2), pero para todo $i \in I$, deducimos que $f(t_1, u(t_1)) \geq g(t_1, v(t_1))$, lo cual contradice $f < g$.

Por otra parte, como $y' = g(t, y)$ es cooperativo $\exists (i, j) \in S \times T$ donde,

$$g_i(t_1, v_1(t_1), \dots, v_j(t_1), \dots, v_n(t_1)) > g_i(t_1, v_1(t_1), \dots, u_j(t_1), \dots, v_n(t_1)), \quad (1.3)$$

ya que $v_j(t_1) > u_j(t_1)$ $j \in T$ y además g_i es estrictamente creciente en la coordenada j por definición de cooperativo. Como g_i también es creciente en las demás coordenadas diferentes de la j -ésima, implica

$$g_i(t_1, v_1(t_1), \dots, u_j(t_1), \dots, v_n(t_1)) \geq g_i(t_1, u_1(t_1), \dots, u_j(t_1), \dots, u_n(t_1)). \quad (1.4)$$

De (1.2), (1.3) y (1.4) se llega a una contradicción, lo que completa la prueba del caso 1.

Caso General. Dado $\epsilon > 0$, llamamos v_ϵ a la solución del problema

$$y' = g(t, y) + \vec{\epsilon} \quad y(0) = y_0 + \vec{\epsilon},$$

con $\vec{\epsilon} = (\epsilon, \dots, \epsilon)$, donde v_ϵ existe por ser g localmente lipschitziana.

Si llamamos $g_\epsilon(t, y) = g(t, y) + \vec{\epsilon}$, $y_{0,\epsilon} = y_0 + \vec{\epsilon}$. Como $f \leq g$, tenemos que $f < g_\epsilon$ y además $x_0 < y_{0,\epsilon}$, de donde por el caso 1 se verifica que,

$$u(t) < v_\epsilon(t) \quad \forall y \in \text{dom } u \cap \text{dom } v_\epsilon \cap [0, +\infty). \quad (1.5)$$

Por el Teorema sobre la Dependencia Continua de los Parámetros y de las Condiciones Iniciales, se tiene que para el compacto $K = \{t\}$ existe ϵ_t , de manera que si $0 < \epsilon < \epsilon_t$ entonces $t \in \text{dom}(v_\epsilon)$ y,

$$v_\epsilon(t) \rightarrow v(t) \quad \text{cuando } \epsilon \rightarrow 0^+.$$

Por tanto para cada t se tendría que tomando límites cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$ en (1.5), se deduce que $u(t) \leq v(t)$. ■

Hacemos notar que la hipótesis de localmente lipschitziana y sistema cooperativo para la función g , se le puede suponer igualmente para la función f y razonar de manera análoga sólo que restando $\vec{\epsilon}$ a dicha función.

También para cuando $f = g$ se puede probar fácilmente el siguiente resultado.

Corolario 1.3.5. *Sea u, v soluciones del sistema cooperativo $x' = f(t, x)$ con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ función continua y localmente lipschitziana. Si $u(0) < v(0)$, entonces $u(t) \leq v(t)$ para todo $t \in \text{dom } u \cap \text{dom } v \cap [0, \infty)$.*

Podemos también obtener algunos resultados de monotonía a partir de los conceptos de subsolución y supersolución, los cuales serán de bastante utilidad en muchas de nuestras demostraciones.

Dado el sistema,

$$x' = f(t, x), \quad (1.6)$$

donde $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$, función continua y localmente lipschitziana en x , con W abierto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Definición 1.3.6. *Dada $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ función continuamente diferenciable, se dice supersolución (resp. subsolución) de (1.6) si $(t, u(t)) \in W$ y $u'(t) \geq f(t, u(t))$ (resp. $u'(t) \leq f(t, u(t))$) para todo $t \in [a, b]$.*

Teorema 1.3.7. *Sean u, v una subsolución y supersolución respectivamente de (1.6). Si el sistema determinado por $f = (f_1, \dots, f_n)$ es cooperativo y*

$u(t_0) \leq v(t_0)$ para algún $t_0 \in I$. Entonces $u \leq v$ en $I \cap [t_0, +\infty)$, donde $I = \text{dom } u \cap \text{dom } v$.

Demostración. Definimos,

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &:= f(t, u(t)) \Leftrightarrow u'(t) \geq 0, & F(t, x) &:= f(t, x) \Leftrightarrow \Lambda(t), \\ \Gamma(t) &:= v'(t) \Leftrightarrow f(t, v(t)) \geq 0, & G(t, x) &:= f(t, x) + \Gamma(t). \end{aligned}$$

Entonces es claro que u, v son soluciones de,

$$x' = F(t, x), \tag{1.7}$$

$$x' = G(t, x), \tag{1.8}$$

respectivamente, y que $F \leq G$. Además los sistemas (1.7) y (1.8) son cooperativos. Como por hipótesis tenemos que $u(t_0) = v(t_0)$, llegamos a que la prueba se completa fácilmente del Teorema 1.3.4.. ■

Nota 1. Si en el teorema anterior se supone $u(t_0) < v(t_0)$ se obtiene de manera análoga que $u < v$.

En el caso escalar tenemos,

Corolario 1.3.8. Sea $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuamente diferenciables tal que u (resp. v) es una subsolución (resp. supersolución) de $x' = f(t, x)$. Si $u(a) \leq v(a)$ entonces $u \leq v$.

1.4 Sistemas Periódicos

Para el caso en el que la ecuación diferencial no es autónoma, es decir $x' = f(t, x)$ donde la variable t puede representar al tiempo, cabe la posibilidad de

que el modelo que representa esta ecuación se repita en intervalos de tiempo constantes, lo cual matemáticamente significa que la función $f(t, x)$ sea periódica en t . Esta razón, y dado que en esta memoria será fundamental este tipo de sistema, nos lleva a recordar algunos resultados y propiedades sobre esta condición que nos harán falta en alguna de las demostraciones, las cuales podemos encontrar en el curso del prof. Tineo de la "X Escuela Venezolana" [63].

Sea $W = \mathbb{R} \times V$ con $V \subset \mathbb{R}^n$ conjunto abierto y $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y localmente lipschitziana en la segunda variable. Se dice que ,

$$x' = f(t, x); \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in V \quad (1.9)$$

es T-periódico para algún $T > 0$, si verifica la siguiente propiedad.

$$f(t + T, x) = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in V.$$

En el desarrollo de esta sección consideramos que (1.9) verifica la propiedad anterior, es decir, f es T-periódica.

Proposición 1.4.1. *Si u es solución de (1.9), entonces $u(t + T)$ también es solución de dicho sistema.*

Demostración. Por ser u solución tenemos que $u'(t + T) = f(t + T, u(t + T))$ de donde como f es T-periódica se concluye $u'(t + T) = f(t, u(t + T))$. ■

Un resultado conocido que nos permite caracterizar las soluciones T-periódicas es el siguiente.

Proposición 1.4.2. *Sea u la solución del problema de valores iniciales,*

$$x' = f(t, x); \quad x(0) = x_0 \in V \quad (1.10)$$

y supongamos que u está definida en $[0, T]$. Si $u(0) = u(T)$ entonces u está definida en \mathbb{R} y es T -periódica.

Demostración. Definamos $v(t) := u(t + T)$ y escribimos $\text{dom}(u) = (\alpha, \beta)$ para $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$. Dado que por definición se verifica que $v(0) = u(0)$, entonces tenemos por la unicidad que $u \equiv v$, con lo que u es T -periódica, además como $\text{dom}(v) = (\alpha \Leftrightarrow T, \beta \Leftrightarrow T)$, se deduce que $\alpha = -\infty$ y $\beta = +\infty$ lo que completa la prueba. ■

Teorema 1.4.3. *Sea u una solución de (1.9), definida y acotada en $[0, \infty)$. Si $\{u(kT)\}$ converge a un punto de V , entonces (1.9) tiene una solución T -periódica u_0 tal que*

$$u(t) \Leftrightarrow u_0(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty. \quad (1.11)$$

Demostración. Sea x_0 el límite de $\{u(kT)\}$ y sea v la solución de (1.9) verificando la condición inicial $v(0) = x_0$.

Afirmación $[0, T] \subset \text{dom } v$.

Para comprobar esta afirmación, tomamos la sucesión $\{u_k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ donde $u_k(t) := u(t + kT)$. Dado que u está acotada en $[0, \infty)$, entonces $\{u_k\}$ es uniformemente acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|u_k(t)\| < M$ para todo $t \in [0, T] \forall k \in \mathbb{N}$. Por tanto de (1.9) tenemos que $\{u'_k\}$ está también uniformemente acotada, y por Ascoli tenemos que existe $\{u_{k_m}\}$ parcial de $\{u_k\}$

que converge uniformemente en un compacto.

$$\{u_{k_m}(t)\} \rightarrow w(t) \text{ uniformemente en } [0, T].$$

Por otra parte $u'_{k_m} \rightarrow f(., w)$ cuando $m \rightarrow +\infty$ uniformemente en $[0, T]$, luego por el Teorema de Intercambio de Límites con Derivadas, llegamos a que w es solución de (1.9), donde además $w(0) = x_0$.

Por la unicidad del límite, v está definida en $[0, T]$ y $v \equiv w$ en $[0, T]$ lo que prueba nuestra afirmación.

Por la Proposición 1.4.1. y un proceso de inducción se llega fácilmente a que u_k es solución de (1.9) para cada $k \in \mathbb{N}$.

Dado que $u_k(0) \rightarrow v(0)$, entonces

$$u_k \rightarrow v \text{ uniformemente en } [0, T]. \quad (1.12)$$

En particular $u_k(T) \rightarrow v(T)$ y así $v(T) = v(0)$ ya que $u_k(T) = u_{k+1}(0)$, con lo que v es T-periódica.

Para probar (1.11) fijamos $\epsilon > 0$, por (1.12) existe un entero $N \geq 1$ tal que,

$$\|u_k(t) \Leftrightarrow v(t)\| \leq \epsilon \text{ si } k \geq N; \quad t \in [0, T].$$

Tomando $s \geq NT$, podemos escribirlo como $s = kT + r$ para $k \geq N$ y $r \in [0, T)$, y así tenemos

$$\|u(s) \Leftrightarrow v(s)\| = \|u_k(r) \Leftrightarrow v(r)\|,$$

ya que v es T-periódica, de donde se completa fácilmente la prueba. ■

Teorema 1.4.4. *Sea u una solución de (1.9) definida en $[0, +\infty)$ tal que $\{u(kT)\}$ converge a un punto $p \in V$. Sea u_0 la solución de (1.9) determinada por la condición inicial $u_0(0) = p$, y supongamos que u_0 está definida en $[0, T]$. Entonces u_0 es T -periódica y*

$$u(t) \Leftrightarrow u_0(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Demostración. Para cada $k \geq 1$ definimos $u_k(t) := u(t + kT)$. Por la Proposición 1.4.1. tenemos que u_k es solución de (1.9). Por otra parte $u_k(0) = u(kT) \rightarrow p = u_0(0)$, de donde

$$u_k(t) \rightarrow u_0(t) \text{ uniformemente en } t \in [0, T] \text{ cuando } k \rightarrow +\infty.$$

En particular $u_k(T) \rightarrow u_0(T)$. Pero $u_k(T) = u_{k+1}(0) \rightarrow p$ cuando $k \rightarrow \infty$, de donde por unicidad del límite $u_0(T) = u_0(0)$, es decir, u_0 es T -periódica y por tanto acotada, con lo que la demostración se completa fácilmente del Teorema 1.4.3. ■

En el caso de un sistema T -periódico lineal tenemos el siguiente resultado, el cual será de gran utilidad para el estudio de las soluciones T -periódicas.

Teorema 1.4.5. *Sea el sistema*

$$x' = A(t)x \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (1.13)$$

con $\Phi(t)$ su matriz fundamental, $\Phi(0) = \text{Identidad}$; $A(t)$ continua y T -periódica en t . Entonces son equivalentes,

i) $I \Leftrightarrow \Phi(T)$ es un isomorfismo de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n .

ii) El sistema (1.13) no posee soluciones T -periódicas no triviales.

Demostración. Si planteamos el problema de valores iniciales

$$x' = A(t)x \quad x(0) = x_0,$$

tenemos que $u(t) = \Phi(t)x_0$ es solución la de dicho PVI. Por tanto si (1.13) admite una solución T-periódica no trivial $u(t)$, por la unicidad de la solución T-periódica ha de ser de la forma $u(t) = \Phi(t)x_0$ con $x_0 \neq 0$, de la Proposición 1.4.2. se tiene que $u(0) = u(T)$ de donde $x_0 = \Phi(T)x_0$. Por tanto se verifica que,

$$u \text{ es solución T-periódica no trivial} \Leftrightarrow [\Phi(T) \Leftrightarrow I]x_0 = 0 \quad x_0 \neq 0.$$

Y por la negación de la equivalencia anterior se concluye fácilmente la prueba. ■

1.5 Ecuación Logística

En esta sección realizamos un breve repaso sobre la ecuación de logística, donde recordamos una serie de resultados que básicamente hemos tomado del curso impartido por el Prof. Tineo en la "X Escuela Venezolana" [63] y de la tesis doctoral del Prof. Carreño titulada "Modelos Logísticos. Aplicaciones a la Agronomía" [17], es por esto por lo que omitimos las demostraciones, aunque sí hemos querido enunciarlos dada su importancia en el desarrollo de las pruebas que realizaremos posteriormente, así como para poder ver con mayor claridad la ampliación conseguida en alguno de ellos para el caso de los sistemas cooperativos, que son a los que nos dedicaremos fundamentalmente en esta memoria.

Más concretamente, supongamos la ecuación.

$$x' = xF(t, x), \quad (1.14)$$

donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $F(t, x)$ es T -periódica en t , para algún $T > 0$ y localmente lipschitziana en $x \geq 0$.

Notemos que la función $F(t, |x|)$ es una extensión de la F anterior a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Por tanto podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que cuando sea necesario F está definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Es también importante resaltar que si u es una solución de (1.14) con $u(t_0) = 0$ para algún t_0 , entonces $u \equiv 0$ (por el teorema de unicidad de la solución). En particular si u es una solución de (1.14) y $u(t_0) > 0$ para algún t_0 , entonces $u(t) > 0$ para todo $t \in \text{dom}(u)$. En este caso se dice que u es una solución positiva.

Definición 1.5.1. Diremos que (1.14) es disipativo si:

D_1) Cada solución positiva u de la ecuación está definida y acotada en $[t_0, +\infty)$ para algún t_0 .

D_2) Existe $R > 0$ tal que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} u(t) \leq R. \quad (1.15)$$

para toda solución positiva u de (1.14).

Algunos resultados técnicos que caracterizan la definición anterior son los siguientes.

Proposición 1.5.2. *Si suponemos que se verifica D_1). Entonces (1.14) es disipativo si y sólo si $Fix(\pi)$ está acotado, donde $Fix(\pi)$ denota el conjunto de todos los puntos fijos no negativos para la aplicación de Poincare π de la ecuación (1.14).*

Teorema 1.5.3. *Supongamos que $F(t, x)$ está acotada superiormente y existe $R > 0$ tal que,*

$$\int_0^t \sup\{F(t, x); R \leq x \leq R + k\} dt < 0,$$

para todo entero $k \geq 1$. Entonces (1.14) es disipativo.

Definición 1.5.4. *Se dice que (1.14) es permanente (o uniformemente persistente) si la ecuación es disipativa y existe $m > 0$ tal que,*

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} u(t) \geq m, \quad (1.16)$$

para cualquier solución positiva u de la ecuación (1.14).

Definición 1.5.5. *Diremos que $F(t, x)$ es fuertemente decreciente en x si,*

S_1) $F(t, x)$ es decreciente en x .

S_1) Existe $\tau \geq 0$ tal que $F(\tau, x)$ es estrictamente decreciente en x .

Teorema 1.5.6. *Supongamos que $F(t, x)$ es fuertemente decreciente en x y*

sean $u, v : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ funciones diferenciables verificando,

a) u, v, u', v' están acotadas y son uniformemente continuas.

b) v está acotada inferiormente por una constante positiva.

c) u (resp. v) es una subsolución (resp. supersolución) de (1.14).

Entonces $u \leq v$.

Corolario 1.5.7. *Si $F(t, x)$ es fuertemente decreciente en x , entonces (1.14) tiene a lo sumo una solución T -periódica positiva.*

Con las definiciones y resultados anteriormente expresados, se prueba en [63] el siguiente teorema, el cual será fundamental en el desarrollo de esta memoria.

Teorema 1.5.8. *Supongamos que $F(t, x)$ es fuertemente decreciente en x y que $\int_0^T F(t, R)dt < 0$ para algún $R > 0$. Entonces (1.14) tiene una única solución T -periódica u_0 tal que,*

$$u(t) \Leftrightarrow u_0(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty,$$

para cada solución positiva u de (1.14). Más aún ,

$$u_0 \equiv 0 \text{ si } \int_0^T F(t, 0)dt \leq 0,$$

$$u_0 > 0 \text{ si } \int_0^T F(t, 0)dt > 0.$$

Llamaremos "atractor global " de (1.14) a la única solución T -periódica u_0 determinada por el Teorema 1.5.8. y la notaremos como θ_F . Por tanto si v es una solución T -periódica positiva de (1.14), donde suponemos que verifican las hipótesis del Teorema 1.5.8., entonces necesariamente $v \equiv \theta_F$.

Así uno de los objetivos planteados en esta memoria, es el estudio de las condiciones necesarias para la existencia de dicho atractor global para el caso particular de los que denominaremos sistemas cooperativos y su aplicación a un modelo depredador-presa.

Igualmente se prueba en [63] que el atractor global de (1.14) depende de una manera continua de la función F .

Teorema 1.5.9. *La aplicación $\theta : \mathcal{D}_T \rightarrow \mathcal{P}_T$; $F \mapsto \theta_F$ es continua.*

Aquí \mathcal{D}_T denota al conjunto de todas las funciones $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo las hipótesis del Teorema 1.5.8. provisto de la topología de la convergencia uniforme en compactos y \mathcal{P}_T al espacio de todas las funciones continuas y T-periódicas provisto de la norma del supremo.

Corolario 1.5.10. *Sea Λ un espacio métrico y sea $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $\mathcal{F}(\cdot, \cdot, \lambda) \in \mathcal{D}_T$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Si θ_λ denota al atractor global de la ecuación*

$$x' = x\mathcal{F}(t, x, \lambda),$$

entonces $\theta_\lambda(t)$ es continua en (t, λ) .

Como consecuencia de los Teoremas 1.5.6.-1.5.8. se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.5.11. *Sean $F, G \in \mathcal{D}_T$. Si $F \leq G$ entonces $\theta_F \leq \theta_G$.*

En ocasiones podemos tener ecuaciones del tipo (1.14) pero que no verifiquen las condiciones del Teorema 1.5.8., por lo que no podríamos garantizar la existencia del atractor global. Sin embargo, podemos determinar su estudio en base al comportamiento de uno asintótico a él. De manera más precisa, sea $G : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $G(t, x)$ es localmente lipschitziana en x . Diremos que G es asintótica a $F \in \mathcal{D}_T$, si existen sucesiones $\{F_n\}, \{G_n\}$ en \mathcal{D}_T y $\{t_n\}$ en $[0, +\infty)$, verificando

- 1) $F_n(t, x) \leq G(t, x) \leq G_n(t, x) \quad \forall t \geq t_n; \quad x \geq 0.$
- 2) $F_n \rightarrow F; \quad G_n \rightarrow G$ en \mathcal{D}_T .

En las condiciones anteriormente expresadas se puede enunciar el siguiente teorema que trata de reflejar un resultado paralelo al establecido en el Teorema 1.5.8..

Teorema 1.5.12. *Sea $G : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $G(t, x)$ continua y localmente lipschitziana en x . Supongamos que G es asintótica a $F \in \mathcal{D}_T$, entonces si u es una solución positiva de la ecuación $x' = xG(t, x)$, se verifica que u está definida en $[0, +\infty)$ y además*

$$u(t) \Leftrightarrow \theta_F(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty,$$

donde θ_F denota al atractor global de (1.14).

Capítulo 2

Existencia del Atractor Global

2.1 Introducción

Durante el desarrollo de esta primera sección vamos a plantear el estudio de un sistema del tipo Kolmogorov, el cual sabemos que puede aplicarse para modelar una población biológica de n -especies que, dependiendo de las condiciones que definen el sistema, pueden estar bajo una situación de mutualismo, depredador-presa, etc. De una manera más concreta hemos adaptado, en este capítulo gran parte de los resultados obtenidos por el prof. Tineo en "*On the Asymptotic Behaviour of some Population Models*" [67], a las condiciones en las que se va a desarrollar esta memoria, para de esta manera poder facilitar las demostraciones de los resultados a los que llegaremos en capítulos posteriores.

Sea,

$$x'_i = x_i f_i(t, x); \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.1)$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, y T -periódica en t . Es decir, $f(t + T, x) = f(t, x)$.

Con el objeto de poder aplicar convenientemente los resultados más importantes de ecuaciones diferenciales, supondremos en adelante que la función f verifica la siguiente propiedad:

P) f posee derivada parcial $f_x(t, x)$ definida y continua en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n$.

Durante este capítulo, será fundamental disponer de las siguientes condiciones o hipótesis:

H_1) Existen constantes positivas c_1, \dots, c_n, m tales que,

$$c_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, x) + \sum_{j \in J_i} c_j \left| \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(t, x) \right| \leq m \quad 1 \leq i \leq n$$

donde $J_i = \{j \in \{1, \dots, n\}; j \neq i\}$.

H_2) El sistema (2.1) posee una solución $v = (v_1, \dots, v_n)$ definida y acotada en un intervalo terminal de \mathbb{R} , es decir, de la forma $[t_0, +\infty)$ para algún $t_0 \in \mathbb{R}$.

En el capítulo 3 ejemplos concretos donde la hipótesis H_1 se satisface, también hacemos igualmente notar la importancia de las hipótesis H_1) y H_2) para la existencia de lo que definiremos como el atractor global de (2.1), pero probaremos más adelante que H_2) se puede deducir de H_1) bajo ciertas condiciones para la función f de (2.1), concretamente en el caso donde la $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0$ para $i \neq j$, la cual determinará un caso particular de sistema kolmogorov que denominamos cooperativo. Este tipo de sistemas será al que nos dedicaremos de manera esencial en esta memoria, de ahí la importancia de la anterior condición en muchas de las demostraciones.

2.2 Atractor Global

Antes de definir el atractor global de (2.1) planteamos en primer lugar algunas cuestiones de notación, las cuales son necesarias para facilitar la redacción de los próximos resultados.

Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, consideramos la norma $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$.

Igualmente, denotamos por $\text{dom } u$, al máximo dominio de una solución u de (2.1). Por último definimos,

$$r(t) := \sum_{j=1}^n c_j \left| \ln \frac{u_j(t)}{v_j(t)} \right|, \quad (2.2)$$

para u y v dos soluciones positivas de (2.1).

Lema 2.2.1. *Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces $g(t) := |f(t)|$ es diferenciable en $I = (a, b) \setminus D$, donde D es el conjunto numerable dado por, $D := \{t; a < t < b, f(t) = 0 \neq f'(t)\}$. Además*

$$g'(t) = \begin{cases} sg(f(t))f'(t) & \text{si } f(t) \neq 0 \\ 0 & \text{si } f(t) = f'(t) = 0 \end{cases}$$

Aquí, $sg(x)$ denota el signo del número real x .

Demostración. En primer lugar es fácil comprobar que D es numerable ya que es un conjunto discreto.

Por otra parte si fijamos $t_0 \in I$, tenemos que

a) Si $f(t_0) \neq 0$ entonces $g'(t_0) = sg(f(t_0))f'(t_0)$ y por tanto g es diferenciable en t_0 .

b) Si $f(t_0) = 0$, debe de ser $f'(t_0) = 0$. Entonces,

$$g'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) \Leftrightarrow g(t_0)}{t \Leftrightarrow t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{|f(t) \Leftrightarrow f(t_0)|}{t \Leftrightarrow t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{|t \Leftrightarrow t_0|}{t \Leftrightarrow t_0} \left| \frac{f(t) \Leftrightarrow f(t_0)}{t \Leftrightarrow t_0} \right| \right)$$

el cual existe y es igual a cero ya que $f'(t_0) = 0$. ■

Proposición 2.2.2. *Sea $I = \text{dom}(u) \cap \text{dom}(v) \neq \emptyset$ para u, v dos soluciones positivas de (2.1). Si se cumple H_1), entonces existe un subconjunto numerable N de I , tal que la función $r(t)$ definida en (2.2) es diferenciable en $J = I \setminus N$, y además*

$$r'(t) \leq \Leftrightarrow m \|u(t) \Leftrightarrow v(t)\| \quad \text{para } t \in J.$$

Demostración. Si llamamos,

$$g_i(t) := \left| \ln \frac{u_i(t)}{v_i(t)} \right| \quad 1 \leq i \leq n,$$

por el Lema 2.2.1., existe $N_i \subset I \quad 1 \leq i \leq n$, numerable tal que g_i es diferenciable $\forall t \in I \setminus N_i$. Por tanto r es diferenciable en $I \setminus N$, donde $N := N_1 \cup \dots \cup N_n$, así para cada $t \in I \setminus N$ se tiene,

$$r'(t) = \sum_{i=1}^n c_i \text{sg}(\ln u_i(t) \Leftrightarrow \ln v_i(t)) \left(\frac{u'_i(t)}{u_i(t)} \Leftrightarrow \frac{v'_i(t)}{v_i(t)} \right),$$

como \ln es una función estrictamente creciente y u, v son soluciones de (2.1),

$$r'(t) = \sum_{i=1}^n c_i \text{sg}(u_i(t) \Leftrightarrow v_i(t)) [f_i(t, u) \Leftrightarrow f_i(t, v)],$$

por el teorema del valor medio,

$$r'(t) = \sum_{i=1}^n c_i \text{sg}(u_i(t) \Leftrightarrow v_i(t)) \left[\sum_{j=1}^n a_{ij}(t) (u_j(t) \Leftrightarrow v_j(t)) \right]$$

donde,

$$a_{ij}(t) := \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, (1 \Leftrightarrow s)v(t) + su(t)) ds. \quad (2.3)$$

Ya que $sg(x)x = |x|$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
r'(t) &= \sum_{i,j} c_i sg(u_i(t) \Leftrightarrow v_i(t)) a_{ij}(t) (u_j(t) \Leftrightarrow v_j(t)) = \\
&= \sum_{i=1}^n c_i sg(u_i(t) \Leftrightarrow v_i(t)) a_{ii}(t) (u_i(t) \Leftrightarrow v_i(t)) + \\
&+ \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \in J_j} c_i sg(u_i(t) \Leftrightarrow v_i(t)) \right) a_{ij}(t) (u_j(t) \Leftrightarrow v_j(t)) \leq \\
&\sum_{j=1}^n c_j |u_j(t) \Leftrightarrow v_j(t)| a_{jj}(t) + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \in J_j} c_i |a_{ij}(t)| \right) |u_j(t) \Leftrightarrow v_j(t)| = \\
&= \sum_{j=1}^n \left[c_j a_{jj}(t) + \sum_{i \in J_j} c_i |a_{ij}(t)| \right] |u_j(t) \Leftrightarrow v_j(t)|.
\end{aligned}$$

Por otra parte, de H_1) y la definición de a_{ij} se tiene,

$$c_i a_{ii}(t) + \sum_{j \in J_i} c_j |a_{ji}(t)| \leq \Leftrightarrow m,$$

de donde el resultado se sigue fácilmente. ■

Proposición 2.2.3. *Supongamos $H_1) \Leftrightarrow H_2)$, y sea u una solución positiva de (2.1) tal que $I = \text{dom}(u) \cap \text{dom}(v) \neq \emptyset$, entonces u está definida en $[t_0, \infty)$ para cualquier $t_0 \in I$. Además,*

$$u(t) \Leftrightarrow v(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty$$

donde v es la solución de (2.1) dada en $H_2)$.

Demostración. Es claro de la Proposición 2.2.2. que $r(t)$ es una función decreciente, así si tomamos $t_0 \in I$, tenemos que $r(t) \leq r(t_0) \quad \forall t \in [t_0, \infty) \cap I$ por tanto,

$$c_i \left| \ln \frac{u_i(t)}{v_i(t)} \right| \leq \sum_{j=1}^n c_j \left| \ln \frac{u_j(t)}{v_j(t)} \right| \leq r(t_0), \quad 1 \leq i \leq n.$$

En particular existe una constante $k > 0$ tal que,

$$\left| \ln \frac{u_i(t)}{v_i(t)} \right| \leq k \quad 1 \leq i \leq n, \quad t \in I \cap [t_0, \infty)$$

de donde,

$$e^{-k} v_i(t) \leq u_i(t) \leq v_i(t) e^k \quad \forall t \geq t_0, \quad t \in I. \quad (2.4)$$

Como v está acotada en $[t_0, +\infty)$, deducimos de (2.4) que u está definida y acotada en $[t_0, +\infty)$.

Por otra parte de la Proposición 2.2.2. tenemos,

$$\int_{t_0}^t \|u(s) \Leftrightarrow v(s)\| ds \leq \frac{1}{\Leftrightarrow m} (r(t) \Leftrightarrow r(t_0)) \quad ; \quad t > t_0;$$

y como $r(t)$ es una función positiva y decreciente, posee límite λ cuando $t \rightarrow +\infty$, de manera que

$$\int_{t_0}^{\infty} \|u(s) \Leftrightarrow v(s)\| ds \leq \frac{r(t_0) \Leftrightarrow \lambda}{m} \quad (2.5)$$

si llamamos $f(t) = \|w(t)\|$, con $w(t) = u(t) \Leftrightarrow v(t)$ tenemos que $f \geq 0$. Además de (2.5),

$$\int_0^{\infty} f(s) ds < +\infty.$$

También, $|f(t) \Leftrightarrow f(s)| = \| \|w(t)\| \Leftrightarrow \|w(s)\| \| \leq \|w(t) \Leftrightarrow w(s)\|$.

Como u, v están acotadas en $[t_0, \infty)$ y son soluciones de (2.1), deducimos que u', v' también están acotadas en este intervalo y así mediante el teorema del valor medio llegamos a que,

$$|f(t) \Leftrightarrow f(s)| \leq |t \Leftrightarrow s| \sup \{ \|w'(\xi)\| \quad ; \quad \xi \in (s, t) \}$$

luego f es también uniformemente continua, con lo que por el Corolario A.1.2. del Apéndice, concluimos que $f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$. ■

Proposición 2.2.4. *Supongamos $H_1) \Leftrightarrow H_2)$. Si u es una solución positiva de (2.1) y $t_0 \in \text{dom } u$. Entonces u está definida en $[t_0, \infty)$ y además,*

$$u(t) \Leftrightarrow v(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty,$$

donde v es la solución de (2.1) dada por $H_2)$. En particular, u está acotada en $[t_0, \infty)$.

Demostración. Es claro que $v^k(t) := v(kT + t)$, es solución de (2.1) para cada $k \in \mathbb{N}$ y además, dado que el dominio de v^k se amplía respecto al de v , podemos escoger $k \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 \in \text{dom } (v^k)$. Aplicando la Proposición 2.2.3. con v^k en lugar de v , obtenemos que u está definida y acotada en $[t_0, +\infty)$ y

$$u(t) \Leftrightarrow v^k(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Pero de la Proposición 2.2.3. con v^k en lugar de u se llega a que

$$v^k(t) \Leftrightarrow v(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty,$$

con lo que fácilmente se completa la prueba. ■

Proposición 2.2.5. *El conjunto S de soluciones T -periódicas no negativas de (2.1) es finito. De hecho S es no vacío y contiene a lo sumo 2^n elementos.*

Demostración. Para cada subconjunto I de $I_n := \{1, \dots, n\}$ sea $S(I)$ el conjunto de aquellas soluciones T -periódicas $u = (u_1, \dots, u_n)$ tales que $u_i > 0 \forall i \in I$ y $u_i \equiv 0 \forall i \in I_n \setminus I$. Obviamente S es la unión de los $S(I)$ y $S(\emptyset) = \{0\}$, es decir, tiene como único elemento la solución trivial.

Veamos ahora que $S(I)$, para $I \neq \emptyset$, posee a lo sumo un elemento. Para ello supongamos que $u = (u_1, \dots, u_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in S(I)$ y definimos,

$$r(t) = \sum_{i \in I} c_i \left| \ln \frac{u_i(t)}{w_i(t)} \right|.$$

Definimos a_{ij} como en (2.3), y concluimos que fuera de un subconjunto numerable N de \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} r'(t) &= \sum_{i \in I} c_i sg(u_i(t) \Leftrightarrow w_i(t)) \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)(u_j(t) \Leftrightarrow w_j(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n c_i sg(u_i(t) \Leftrightarrow w_i(t)) \sum_{j \in I} a_{ij}(t)(u_j(t) \Leftrightarrow w_j(t)) \end{aligned}$$

porque $sg(u_i(t) \Leftrightarrow w_i(t)) = 0 \quad \forall i \in I_n \setminus I$.

Razonando como en la prueba de la Proposición 2.2.2., se concluye que

$$r'(t) \leq \Leftrightarrow m \|u(t) \Leftrightarrow w(t)\| \quad t \in \mathbb{R} \setminus N. \quad (2.6)$$

En particular r es decreciente y T-periódica y en consecuencia constante.

Así $r' \equiv 0$ en \mathbb{R} y de (2.6) $u \equiv w$. Luego $S(I)$ posee a lo sumo un elemento, y por tanto S es no vacío con a lo sumo 2^n elementos. ■

Para poder probar los próximos resultados de una manera más cómoda, establecemos las siguientes definiciones y notaciones. Dado $p \in \mathbb{R}_+^n$ se define $u(t, p)$ como la solución de (2.1) que comienza en p ; sea $D \subset \mathbb{R}_+^n$ el subconjunto de todos los puntos $p \in \mathbb{R}_+^n$ tal que la solución $u(t, p)$ está definida en $[0, T]$, definimos $\Pi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ como la aplicación de Poincare, es decir $\Pi(p) := u(T, p)$ y denotamos por $Fix(\Pi)$ el conjunto de todos los puntos fijos de Π . Es claro que $p \in Fix(\Pi)$ si y sólo si $u(t, p)$ es una solución T-periódica

de (2.1). Además dado que $\Pi^k(p) = u(kT, p)$ se tiene,

$$\Pi^{k+1}(p) = \Pi(\Pi^k(p)) = \Pi(u(kT, p)) = u(T, u(kT, p)) = u((k+1)T, p)$$

Ya que $u(t+T, p)$ es solución de (2.1), se tiene de la Proposición 2.2.4. que $u(t+T, p) \Leftrightarrow u(t, p) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, lo cual implica que,

$$\Pi^{k+1}(p) \Leftrightarrow \Pi^k(p) \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow +\infty. \quad (2.7)$$

Proposición 2.2.6. *Si $\{u(kT, p)\}$ tiene una parcial convergente a un punto $q \in \mathbb{R}_+^n$, entonces $u(t, q)$ está definida en \mathbb{R} y es T -periódica. ($q \in \text{Fix}(\Pi)$).*

Demostración. Sea $\{u(k_l T, p)\}$ dicha parcial convergente a un punto q , entonces podemos definir la sucesión $\{w^l : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ donde $w^l(t) := u(k_l T + t, p)$ con $l \in \mathbb{N}$ $0 \leq t \leq T$, que por la Proposición 2.2.4. está acotada uniformemente en $[0, T]$. También,

$$(w_i^l)' = u_i'(k_l T + t, p) = w_i^l f_i(k_l T + t, w^l)$$

y como f_i es T -periódica, $(w_i^l)' = w_i^l f_i(t, w^l)$ con lo que $\{(w^l)'\}$ es una sucesión uniformemente acotada en $[0, T]$. Por Ascoli, existe una parcial de $\{w^l\}$ convergente, que por simplicidad la vamos a notar igual, es decir,

$$w^l(t) \rightarrow w(t) \text{ cuando } l \rightarrow +\infty \text{ uniformemente en } [0, T],$$

y por el teorema de intercambio de límites con derivadas, se tiene

$$w_i' = w_i f_i(t, w) \quad 1 \leq i \leq n.$$

Además,

$$w(T) = \lim_{l \rightarrow +\infty} w^l(T) = \lim_{l \rightarrow +\infty} u(k_l T + T, p) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \Pi^{k_l+1}(p)$$

de donde por (2.7),

$$w(T) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \Pi^{kl}(p) = \lim_{l \rightarrow +\infty} w^l(0) = w(0)$$

luego, w es periódica, y $w(t) = u(t, q)$. ■

Con todo esto estamos en condiciones de probar el siguiente resultado, el cual es especialmente importante ya que es a partir de él cuando obtenemos las condiciones suficientes para la existencia de lo que denominaremos como el atractor global del sistema.

Teorema 2.2.7. *Sea el sistema (2.1) verificando $H_1) \Leftrightarrow H_2)$. Entonces existe una única solución T -periódica U^f de (2.1) tal que,*

$$u(t) \Leftrightarrow U^f(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty,$$

para toda u solución positiva de (2.1).

Demostración. De la proposición 2.2.4. se tiene que si u, w son soluciones positivas de (2.1) entonces,

$$u(t) \Leftrightarrow w(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

De aquí tendríamos la unicidad con lo que dado $p > 0$, bastaría ver la existencia de una solución T -periódica U^f de (2.1) tal que

$$u(t, p) \Leftrightarrow U^f(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Con este fin notemos que por la Proposición 2.2.5., el conjunto $Fix(\Pi)$ es finito y no vacío. En particular se puede escribir,

$$Fix(\Pi) = \{p_1, \dots, p_s\} \text{ para algun } s \geq 1.$$

Tomamos B_1, \dots, B_s bolas cerradas alrededor de p_1, \dots, p_s respectivamente, tal que $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Sea N_j el conjunto de todos los enteros $k \geq 1$ tal que $\Pi^k(p) \in B_j$, y sea $N = \mathbb{N} \setminus (N_1 \cup \dots \cup N_s)$.

Afirmación. N es finito.

Supongamos por el absurdo que $\{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ es infinito. Por la Proposición 2.2.4., la sucesión $\{u(n_k T, p)\}$ está acotada y por tanto posee un punto límite $q \in \mathbb{R}_+^n$. De la Proposición 2.2.6. tenemos que $q \in \text{Fix}(\Pi) = \{p_1, \dots, p_s\}$, de donde q es el centro de alguna de las B_j , es decir, $N \cap N_j \neq \emptyset$, lo cual contradice la manera en la que hemos definido N y por tanto la afirmación es cierta.

En consecuencia existe j tal que N_j es infinito el cual podemos ordenar de la siguiente manera $N_j = \{m_1 < m_2 < \dots\}$.

Por la Proposición 2.2.6. y la elección de las bolas B_1, \dots, B_s es fácil ver que,

$$\Pi^{k_m}(p) \rightarrow p_j \text{ cuando } m \rightarrow +\infty. \quad (2.9)$$

De aquí y de (2.7),

$$\Pi^{k_m+1}(p) \rightarrow \Pi(p_j) = p_j \text{ cuando } m \rightarrow +\infty$$

y en consecuencia existe $k_* \in N_j$ tal que si $k \geq k_*$ y $k \in N_j$ entonces $k+1 \in N_j$, luego $\{k \in \mathbb{N}; k \geq k_*\} \subseteq N_j$ y por (2.9)

$$\Pi^k(p) \rightarrow p_j \text{ cuando } k \rightarrow +\infty.$$

Tomando $U^f(t) = u(t, p_j)$ es claramente una solución T-periódica y por el

Teorema 1.4.3. , se tiene además que,

$$u(t, p) \Leftrightarrow U^f(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

■

Definición 2.2.8. *Llamamos atractor global de (2.1) a una solución T -periódica U , tal que*

$$u(t) \Leftrightarrow U(t) \rightarrow 0, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty$$

para toda solución positiva u del sistema (2.1).

Veamos como para el caso autónomo, es decir, cuando la función f no depende de t , el atractor global de (2.1) es constante. Para ello necesitamos el siguiente lema previo.

Lema 2.2.9. *Sea $U : \mathbb{R} \rightarrow X$ una función continua y periódica de periodos $T_N > 0$, $N \in \mathbb{N}$ con $\{T_N\} \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow +\infty$. Entonces U es constante.*

Demostración. Fijemos $\epsilon > 0$, por ser U continua, existe $\delta > 0$ tal que

$$|U(r) \Leftrightarrow U(0)| < \epsilon \text{ si } |r| < \delta. \quad (2.10)$$

Por otra parte como $T_N \rightarrow 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_{N_0} < \delta$.

Fijamos $t \in \mathbb{R}$ arbitrario y recordemos que

$$t = kT_{N_0} + r \text{ con } 0 \leq r < \delta, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

Como U es T_N -periódica, $\forall N \in \mathbb{N}$, se sigue de (2.10) y (2.11) que

$$|U(t) \Leftrightarrow U(0)| = |U(kT_{N_0} + r) \Leftrightarrow U(0)| = |U(r) \Leftrightarrow U(0)| < \epsilon,$$

lo que completa la prueba. ■

Teorema 2.2.10. *Sea U^f el atractor global de*

$$x'_i = x_i f(x) \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.12)$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^1 que verifica $H_1) \Leftrightarrow H_2)$. Entonces U^f es constante.

Demostración. Como f no depende de t , podemos suponerla T_N -periódica con $T_N = 2^{-N}$ $N \in \mathbb{N}$. Sea $U_{T_N}^f$ el atractor global T_N -periódico de (2.12), para cada $N \in \mathbb{N}$, en particular U_1^f es de período $T_0 = 1$.

Por otra parte,

$$U_{\frac{1}{2}}^f(k + t_0) = U_{\frac{1}{2}}^f(2k\frac{1}{2} + t_0) = U_{\frac{1}{2}}^f(t_0) \quad k \in \mathbb{N}$$

y como U_1^f es atractor global del sistema (2.12), por el Teorema 2.2.7.,

$$U_1^f(k + t_0) \Leftrightarrow U_{\frac{1}{2}}^f(k + t_0) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } k \rightarrow \infty.$$

De aquí ,

$$U_1^f(t_0) = U_{\frac{1}{2}}^f(t_0).$$

y en consecuencia,

$$U_1^f \equiv U_{\frac{1}{2}}^f,$$

Por tanto U_1^f también es de periodo $T = \frac{1}{2}$ y de manera análoga

$$U_1^f \equiv U_{\frac{1}{2}}^f \equiv U_{\frac{1}{4}}^f \dots$$

Luego $U^f \equiv U_1^f$ es de periodo $2^{-N} \quad \forall N \in \mathbb{N}$, y por el Lema 2.2.9. concluimos que U^f es constante. ■

2.3 Sistemas Cooperativos

Tal y como planteamos al principio de este capítulo, probaremos que la hipótesis H_2) no es necesaria para obtener el Teorema 2.2.7. cuando el sistema verifica algunas condiciones. Más concretamente, supongamos que la función f del sistema (2.1) satisface,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0 \quad \text{si } i \neq j, \quad (2.13)$$

en este caso particular H_1) implica H_2). Para probar dicha afirmación seguimos un artículo del profesor Tineo [62] (sometido a publicación).

Esta condición implica claramente que el sistema sea cooperativo, la cual desde el punto de vista biológico viene a decirnos, que cada especie se beneficia por la presencia de las demás.

Dado que prácticamente en el resto de esta memoria nos vamos a dedicar a sistemas con esta condición y según hemos dicho anteriormente esta implica que el sistema es cooperativo, supondremos, salvo que se diga lo contrario, que los sistemas cooperativos serán aquellos casos particulares de los sistemas kolmogorov que satisfagan la condición (2.13).

Para poder llegar a comprobar que H_2) no es necesaria para obtener el Teorema 2.2.7. en el caso de sistemas cooperativos , debemos de desarrollar previamente una serie de resultados técnicos que nos serán necesarios en alguna de las demostraciones. Comenzamos con una proposición que es consecuencia de un Teorema de Lazer [46], pero que aquí demostramos de manera directa y simple.

Proposición 2.3.1. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$ continua y T -periódica. Supongamos que existen c_1, \dots, c_n constantes positivas tales que,*

$$\Leftrightarrow m_i := c_i a_{ii}(t) + \sum_{j \in J_i} c_j |a_{ji}(t)| < 0; \quad t \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Si $\Phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema,

$$x' = A(t)x \tag{2.14}$$

con $\Phi(0) = \text{Identidad}$, entonces el radio espectral de $\Phi(T)$ es menor que uno.

Demostración. Sea $w = (w_1, \dots, w_n)$ una solución de (2.14), y definamos

$$r(t) = \sum_{j=1}^n c_j |w_j(t)|.$$

Usando el mismo argumento de la Proposición 2.2.2. , existe un subconjunto numerable N de \mathbb{R} tal que r es diferenciable en $\mathbb{R} \setminus N$ y $r'(t) \leq \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n m_i |w_i(t)|$. Tomando $m = \min\{m_1, \dots, m_n\}$ y $c = \max\{c_1, \dots, c_n\}$ queda,

$$r'(t) \leq \Leftrightarrow mc^{-1}r(t).$$

Integrando la desigualdad anterior en $[0, T]$ queda

$$r(T) \leq \exp(\Leftrightarrow mc^{-1}T)r(0).$$

Definimos $\|\cdot\|_c$ en \mathbb{R}^n como $\|x\|_c := c_1|x_1| + \dots + c_n|x_n|$ y así,

$$\|\Phi(T)x\|_c \leq \exp(\Leftrightarrow mc^{-1}T)\|x\|_c. \tag{2.15}$$

Si λ es el valor propio de $\Phi(T)$, se verifica que $|\lambda|\|x\|_c = \|\Phi(T)x\|_c$ para algún $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, y junto con (2.15) se tiene que,

$$|\lambda|\|x\|_c \leq \exp(\Leftrightarrow mc^{-1}T)\|x\|_c.$$

Simplificando, tenemos que $|\lambda| \leq \exp(\Leftrightarrow mc^{-1}T) < 1$, lo que completa la prueba. \blacksquare

Corolario 2.3.2. *Supongamos que se verifica H_1) y sea $U = (U_1, \dots, U_n)$ una solución T -periódica positiva de (2.1). Entonces $\Pi'(U(0)) \Leftrightarrow$ Identidad es invertible, donde Π es la aplicación de Poincare de (2.1).*

Demostración. Si calculamos la ecuación en variaciones de (2.1) en U obtenemos,

$$y'_i = f_i(t, U(t))y_i + U_i(t) \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, U(t)) \quad (2.16)$$

Sabemos que $\Pi(p) = u(T, p)$ y por tanto $\Pi'(p) = \frac{\partial u}{\partial p}(T, p)$, de donde por el Teorema 1.2.9. se tiene que $\Pi'(U(0)) = \Phi(T)$, siendo Φ la matriz fundamental de (2.16) con $\Phi(0) =$ Identidad.

Por otra parte, si hacemos el cambio $z_i = \frac{y_i}{U_i}$ el sistema (2.16) se transforma en

$$z'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, U(t))U_j(t)z_j \quad (2.17)$$

y llamando $a_{ij}(t) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, U(t))U_j(t)$; tenemos que por H_1),

$$c_i a_{ii}(t) + \sum_{j=1}^n c_j |a_{ji}(t)| \leq \Leftrightarrow m U_i(t) \leq \Leftrightarrow m_i$$

con $m_i > 0$ ya que $U_i > 0$.

Por la Proposición 2.3.1. tenemos que si $\Psi(t)$ es la matriz fundamental de (2.17) con $\Psi(0) =$ Identidad , el radio espectral de $\Psi(T)$ es menor que uno y análogamente para $\Phi(T)$ ya que ,

$$\Psi(T) = P\Phi(T)P^{-1} \quad \text{con } P = \text{Diag}(U_1(T), \dots, U_n(T)).$$

Con lo que fácilmente se completa la prueba. ■

Para poder probar los resultados que nos hemos planteado en lo que sigue en este capítulo, necesitamos el siguiente lema técnico sobre "continuación de soluciones".

Lema 2.3.3. *Sea $H : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continuamente diferenciable con D un subconjunto abierto de $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$, y supongamos que,*

i) $H^{-1}(0)$ es un subconjunto compacto.

ii) $H^{-1}(0) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^n)$ es un conjunto unitario.

iii) La derivada parcial $H_x(\lambda, x)$ es invertible si $H(\lambda, x) = 0$

Entonces $H^{-1}(0) \cap (\{1\} \times \mathbb{R}^n)$ es un conjunto unitario.

Demostración. Para cada $\lambda \in [0, 1]$, notemos por $P_\lambda := H^{-1}(0) \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{R}^n)$. Es claro por ii) que $H(0, x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}^n$, de donde por iii) y el Teorema de la Función Implícita, existe $\mu \in (0, 1]$ y una función continua $\Psi : [0, \mu] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $(\lambda, \Psi(\lambda)) \in D$ y $H(\lambda, \Psi(\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda \in [0, \mu]$. Es decir, $P_\lambda \neq \emptyset$ para cualquier $\lambda \in [0, \mu]$.

Afirmación 1. Existe $\epsilon \in (0, 1]$ tal que P_λ es un conjunto unitario para todo $\lambda \in [0, \epsilon]$.

Razonando por reducción al absurdo, suponemos que existen dos sucesiones $(\lambda_k, x_k), (\lambda_k, y_k)$ con $\lambda_k \rightarrow 0$; $x_k \neq y_k$ y $H(\lambda_k, x_k) = H(\lambda_k, y_k) = 0$. Por tanto se tiene que $(\lambda_k, x_k), (\lambda_k, y_k) \in H^{-1}(0)$ y por i), podemos encontrar parciales convergentes, es decir

$$x_{k_i} \rightarrow \bar{x}; \quad y_{k_i} \rightarrow \bar{y} \quad \text{cuando } k_i \rightarrow +\infty.$$

Y por la continuidad de la función H tenemos $H(0, \bar{x}) = H(0, \bar{y}) = 0$ de

donde por *ii*) deducimos que $\bar{x} = \bar{y} = x_0$.

Por el Teorema del Valor Medio,

$$0 = H(\lambda_k, x_k) \Leftrightarrow H(\lambda_k, y_k) = \int_0^1 H_x(\lambda_k, (1 \Leftrightarrow s)y_k + sx_k) ds \quad (x_k \Leftrightarrow y_k).$$

Llamando $w^k = \frac{x_k \Leftrightarrow y_k}{\|x_k \Leftrightarrow y_k\|}$ queda

$$\left[\int_0^1 H_x(\lambda_k, (1 \Leftrightarrow s)y_k + sx_k) ds \right] w^k = 0,$$

tomando w un punto límite de w^k , se tiene

$$H_x(0, x_0)w = 0, \quad (2.18)$$

como $\|w_k\| = 1 \quad \forall k$ se obtiene de (2.18) y *iii*) una contradicción lo que prueba la Afirmación 1.

Afirmación 2. Para el ϵ dado en la Afirmación 1, se tiene que P_ϵ es un conjunto unitario.

Es claro que P_ϵ no es vacío ya que tomando $\{\lambda_k\} \rightarrow \epsilon$ con $0 < \lambda_k < \epsilon \quad \forall k$, por *i*) \Leftrightarrow *ii*) y la Afirmación 1 existe $x_k \in D$ con $\{x_k\} \rightarrow \bar{x}$ donde además $(\lambda_k, x_k) \in P_{\lambda_k}$, tomando límites,

$$(\lambda_k, x_k) \rightarrow (\epsilon, \bar{x}) \quad \text{cuando } k \rightarrow +\infty.$$

y por la continuidad de H , se tiene que $H(\epsilon, \bar{x}) = 0$.

Sean $(\epsilon, x^1), (\epsilon, x^2) \in P_\epsilon$. Por *iii*) y el Teorema de la Función Implícita, existe $\delta \in (0, \epsilon)$ y funciones $\Psi_1, \Psi_2 : [\delta, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\Psi_1(\epsilon) = x^1$, $\Psi_2(\epsilon) = x^2$ y $H(\lambda, \Psi_i(\lambda)) = 0 \quad i = 1, 2; \quad \lambda \in [\delta, \epsilon]$.

De la Afirmación 1 sabemos que $\Psi_1(\lambda) = \Psi_2(\lambda) \quad \lambda \in (\delta, \epsilon)$, por tanto tomando límite cuando $\lambda \rightarrow \epsilon$ queda $x^1 = \Psi_1(\epsilon) = \Psi_2(\epsilon) = x^2$. Con lo que la Afirmación 2 queda totalmente probada.

Definimos $E := \{\epsilon \in (0, 1]; P_\lambda \text{ es unitario } \forall \lambda \in [0, \epsilon]\}$. Claramente es un conjunto no vacío y acotado. Llamamos $\epsilon_0 = \sup E$.

Por la Afirmación 2 tenemos que si $\epsilon_1 \in E$, entonces $[0, \epsilon_1] \subset E$, con lo que el conjunto E es un intervalo, además si $\lambda \in [0, \epsilon_0]$ por análogos argumentos a los utilizados en la demostración de la Afirmación 2, tenemos que $\lambda \in E$ y por otra parte, es inmediato que $E \subset [0, \epsilon_0]$, de donde se deduce que $E = [0, \epsilon_0]$, es decir, $\epsilon_0 \leq 1$. Para finalizar supongamos que $\epsilon_0 < 1$, entonces por el mismo argumento de la Afirmación 2, existe un entorno N_{ϵ_0} de ϵ_0 donde P_λ es unitario $\forall \lambda \in N_{\epsilon_0}$, en particular podemos tomar $\lambda > \epsilon_0$, lo que contradice el que $\epsilon_0 = \sup E$, por tanto $\epsilon_0 = 1$, con lo que la prueba está completa. ■

Teorema 2.3.4. *Si además de H_1) y (2.13) se verifica,*

$$\int_0^T f_i(t, 0) dt > 0 \quad \forall i, \quad (2.19)$$

Entonces (2.1) posee una solución T -periódica positiva.

Demostración. En primer lugar notamos que la condición H_1) para el caso cooperativo, es decir cuando se verifica (2.13), la podemos expresar de la siguiente manera,

$$\sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \leq \Leftrightarrow m.$$

Dado $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos $S(x) := x_1 + \dots + x_n$; y

$$f_i^*(x) = 1 + c_i^{-1}[1 + S(x) \Leftrightarrow (n+1)x_i]; \quad 1 \leq i \leq n.$$

Claramente $f^* := (f_1^*, \dots, f_n^*)$ satisface H_1 y (2.19). De hecho,

$$\sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial f_j^*}{\partial x_i} \equiv \Leftrightarrow 1; \quad \forall i.$$

Notemos también que $f^*(x^*) = 0$, en donde $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$, con $x_i^* = 1 + (n+1)^{-1}(c_i + S(c))$ y $c = (c_1, \dots, c_n)$.

Por otra parte, para cada $\lambda \in [0, 1]$ definimos,

$$f^\lambda := (f_1^\lambda, \dots, f_n^\lambda) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; \quad f_i^\lambda(t, x) = (1 \Leftrightarrow \lambda)f_i^*(x) + \lambda f_i(t, x),$$

donde $\mathbb{R}_{++}^n := \{x \in \mathbb{R}^n; x > 0\}$ y además se cumple,

$$\sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial f_j^\lambda}{\partial x_i}(t, x) \leq \Leftrightarrow \bar{m}. \quad (2.20)$$

con $\bar{m} := \min\{1, m\}$.

Es claro que esta parametrización determina que $f_i^0 = f_i^*$; $f_i^1 = f_i$ $\forall i$.

Sea $\Pi_\lambda : D_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación de Poincare para el sistema,

$$x'_i = x_i f_i^\lambda(t, x_1, \dots, x_n) \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.21)$$

Es sabido que D_λ es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n el cual eventualmente pudiera ser vacío. También sabemos que, por el Teorema sobre la dependencia continua de los parámetros, $D := \{(\lambda, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^n; x \in D_\lambda\}$ es un abierto de $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$, y $H : D \rightarrow \mathbb{R}^n$; $H(\lambda, x) = \Pi_\lambda(x) \Leftrightarrow x$; es una función continuamente diferenciable. Vamos a tratar de aplicarle a la función H el resultado obtenido en el Lema 2.3.3. para de esta manera concluir con la demostración del presente Teorema. Por (2.20) y el Corolario 2.3.2. se tiene que $H_x(\lambda, x)$ es invertible para todo $(\lambda, x) \in H^{-1}(0)$, y así la función H verifica el apartado *iii*) del Lema 2.3.3.

También hemos visto que $H(0, x^*) = \Pi_0(x^*) \Leftrightarrow x^* = 0$, lo que por el Teorema 2.2.10., implica $H^{-1}(0) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^n) = \{(0, x^*)\}$. Es decir, H verifica el apartado *ii*) del Lema 2.3.3.. Para poder aplicar el citado Lema, nos hace falta comprobar el apartado *i*), es decir, que $H^{-1}(0)$ es un compacto.

Sea $\{(\lambda_k, x_k)\}$ una sucesión de $H^{-1}(0)$ y llamamos $u^k = (u_1^k, \dots, u_n^k)$ a la solución positiva T-periódica de la ecuación,

$$x'_i = x_i[(1 \Leftrightarrow \lambda_k)f_i^*(x) + \lambda_k f_i(t, x)] \quad 1 \leq i \leq n,$$

con $u^k(0) = x^k$.

Afirmación. La sucesión (u^k) está uniformemente acotada, es decir existe $M > 0$ tal que $\|u^k(t)\| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$.

Para comprobar dicha afirmación, definimos

$$W_k(t) := \sum_{j=1}^n c_j \ln(u_j^k(t)); \quad \phi_k(t) := \sum_{j=1}^n c_j f_j^{\lambda_k}(t, x).$$

Por (2.20) tenemos que

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i}(t, x) \leq \Leftrightarrow \bar{m}; \quad \forall k, t, x$$

de donde junto con el Teorema del Valor Medio,

$$\phi_k(t, x) \leq \phi_k(t, 0) \Leftrightarrow \bar{m}\|x\| \leq K \Leftrightarrow \bar{m}\|x\|,$$

para alguna constante $K > 0$. Por tanto

$$W'_k(t) = \phi_k(t, u^k(t)) \leq K \Leftrightarrow \bar{m} \sum_{j=1}^n u_j^k(t) \leq K \Leftrightarrow \frac{\bar{m}}{c} \sum_{j=1}^n c_j u_j^k(t)$$

con $c = \max\{c_i; i = 1, \dots, n\}$. En particular

$$W'_k(t) \leq K \Leftrightarrow \frac{\bar{m}}{c} \sum_{j=1}^n c_j \ln u_j^k(t) = K \Leftrightarrow \frac{\bar{m}}{c} W_k(t).$$

Como W_k es T-periódica, alcanza su máximo y por tanto

$$\max(W_k(t)) \leq \frac{Kc}{\bar{m}},$$

de donde,

$$u_1^k(t)^{c_1} \dots u_n^k(t)^{c_n} \leq M, \quad (2.22)$$

Ya que $f^*(0) > 0$, se sigue de (2.19) que,

$$\int_0^T f_i^\lambda(t, 0) dt > 0; \quad \lambda \in [0, 1], \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.23)$$

Consideremos ahora, para $\lambda \in [0, 1]$, la siguiente ecuación de logística.

$$z' = z f_i^\lambda(t, z e_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.24)$$

con $e_i \equiv (0, \dots, 1, \dots, 0)$; es decir, 1 en la i -ésima coordenada y 0 en el resto.

Como f^λ verifica (2.20), en particular se tiene que $\frac{\partial f_i^\lambda}{\partial x_i} \leq \frac{\Leftrightarrow \bar{m}}{c_i} < 0$ de donde $f_i^\lambda(t, z e_i) \rightarrow \Leftrightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow +\infty$ uniformemente en $\lambda \in [0, 1]$ y $t \in [0, T]$; por tanto existe $R > 0$ para el que se verifica $\int_0^T f_i^\lambda(t, R) < 0$. Por el Teorema 1.5.8. existe una única solución T-periódica positiva $U_i(t, \lambda)$ $1 \leq i \leq n$ de (2.24); que atrae a todas las soluciones positivas del sistema y donde además por (2.23) y el Teorema 1.5.8. se cumple que $U_i(t, \lambda) > 0 \forall i$. Notamos también que por el Corolario 1.5.10., $U_i(t, \lambda)$ es continua respecto de las dos variables (t, λ) y en consecuencia,

$$\alpha := \min\{U_i(t, \lambda) : 1 \leq i \leq n, \quad t \in [0, T], \quad \lambda \in [0, 1]\} > 0.$$

Por (2.13) es claro que $f_i^\lambda(t, x) \geq f_i^\lambda(t, x_i e_i)$ para $x \in \mathbb{R}_+^n$, de donde utilizando el mismo razonamiento empleado por el Prof. Tineo en el teorema 1.1

de [64], llegamos a que,

$$u_i^k(t) \geq U_i(t, \lambda_k) \geq \alpha > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.25)$$

y fijando $k \in \{1, \dots, n\}$ se sigue de (2.22) que,

$$\alpha^{S(c)-c_i} u_i^k(t)^{c_i} \leq M. \quad (2.26)$$

Con lo que la afirmación es cierta.

De la anterior afirmación y (2.21) concluimos que la sucesión de derivadas $((u^k)')$ es uniformemente acotada, y por el Teorema de Ascoli existe una parcial uniformemente convergente a una función continua T -periódica $v = (v_1, \dots, v_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la cual por simplicidad en la notación la vamos a escribir igual.

Por otra parte como $\lambda_k \in [0, 1]$, podemos suponer que converge a un punto μ , de donde es fácil probar que v es solución del sistema,

$$x'_i = x_i f_i^\mu(t, x); \quad 1 \leq i \leq n.$$

Así $(\lambda_k, u^k) \rightarrow (\mu, v)$, y en particular se tiene que $x^k = u^k(0)$, lo que implica que $(\lambda_k, x^k) \rightarrow (\mu, v(0)) \in H^{-1}(0)$, por tanto $H^{-1}(0)$ es compacto, y por el Lema 2.3.3. se deduce que (2.1) posee una solución T -periódica que además es positiva ya que por (2.25) $v_i(t) > \alpha \quad \forall t \in \mathbb{R}; 1 \leq i \leq n$, lo que completa la prueba. ■

Teorema 2.3.5. *Si el sistema (2.1) verifica H_1) y (2.13). Entonces cada solución positiva está definida en $[t_0, +\infty)$ para $t_0 \in \mathbb{R}$. Más aún, dicho sistema tiene una solución T -periódica U tal que,*

$$u(t) \Leftrightarrow U(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty$$

para cualquier solución positiva u del sistema.

Demostración. Fijamos $p > 0$ en \mathbb{R}^n tal que $p + f(t, 0) > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y definimos $g(t, x) := p + f(t, x)$. Por el Teorema 2.3.4. y el Teorema 2.2.7. se tiene que cada solución positiva del sistema,

$$x'_i = x_i g_i(t, x) \quad 1 \leq i \leq n \quad (2.27)$$

está definida y acotada en algún intervalo terminal de \mathbb{R} .

Sea u una solución de (2.1) con $u(0) > 0$ y sea v la solución de (2.27) determinada por la condición inicial $v(0) = u(0)$. Dado que $g(t, x) > f(t, x)$, por el Teorema 1.3.4. se verifica $u(t) \leq v(t) \quad \forall t \geq 0$ del $dom(u) \cap dom(v)$, de donde claramente u está definida y acotada en $[t_0, +\infty)$ para $t_0 \in \mathbb{R}$, es decir el sistema (2.1) verifica la condición H_2 y el resultado se sigue del Teorema 2.2.7. ■

Es interesante resaltar que si un sistema cooperativo, como el que estamos considerando, posee una solución T -periódica positiva, entonces ésa es el atractor global, mientras que si se tiene una solución T -periódica no negativa (con alguna componente nula) ya no es tan evidente que ella sea el atractor global, lo cual será uno de los objetivos de esta memoria, el cual probaremos posteriormente.

Corolario 2.3.6. Si $f_i(t, x)$ verifica H_1) y es de la forma,

$$f_i(t, x) = a_i(t) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n b_{ji}(t) x_j \quad 1 \leq i \leq n,$$

para $a_i(t), b_{ij}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones T -periódicas. Entonces el resultado obtenido en el Teorema 2.3.5. es igualmente cierto.

Demostración. Tomamos $m_0 > 0$ con $m_0 > a_i(t)$ y definimos $\beta_{ii}(t) := b_{ii}(t)$; $\beta_{ij} := \Leftrightarrow |b_{ij}|$ $i \neq j$ y $g_i(t, x) := m_0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(t)x_j$ $1 \leq i \leq n$, como por H_1) existen constantes positivas c_1, \dots, c_n, m tales que

$$c_i b_{ii}(t) + \sum_{j \in J_i} c_j |b_{ji}(t)| \leq \Leftrightarrow m,$$

en particular, g satisface las hipótesis de Teorema 2.3.5. , como además $f(t, x) \leq g(t, x)$, utilizando el mismo argumento empleado en la demostración de Teorema 2.3.5. se completa la prueba. ■

Capítulo 3

Continuidad del Atractor

3.1 Introducción

Este capítulo determina el núcleo fundamental de esta memoria, donde se desarrolla un teorema de continuidad para el atractor global del sistema (2.1). Por tanto es importante tener presentes las hipótesis planteadas en el capítulo anterior para, de esta manera, garantizar la existencia del citado atractor global del sistema.

Más concretamente volvemos a considerar un sistema periódico Kolmogorov de la forma,

$$x'_i = x_i f_i(t, x); \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, y T -periódica en t , a la que recordamos se le supone que verifica la propiedad P) (del capítulo anterior) y donde para poder disponer de las principales conclusiones del Capítulo 2, es necesario tener en cuenta las hipótesis $H_1) \Leftrightarrow H_2)$, así como la condición (2.13), que por comodidad en la notación, la vamos a considerar

como una nueva hipótesis sobre (2.1), concretamente:

$$H_3) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0 \quad \text{para } i \neq j.$$

Esta hipótesis sabemos que determinará los sistemas que hemos definido como cooperativos, los cuales recordamos que desde el punto de vista biológico representa aquellas situaciones en las que cada especie, de las n modeladas por el sistema, se beneficia en su desarrollo por la presencia de las demás. También recordamos que, según hemos comprobado en el capítulo anterior esta condición junto con H_1) implica H_2), reduciéndose así para estos sistemas las hipótesis necesarias que garantizan la existencia del atractor global.

Veamos en primer lugar un ejemplo de un sistema donde estas condiciones se satisfacen.

Ejemplo. Sea,

$$x'_i = x_i \left[a_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^3 b_{ij} x_j \right] \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (3.1)$$

donde $a_i, b_{ij} \in \mathbb{R}$, con $b_{ii} > 0$ y $b_{ij} < 0 \quad \forall i \neq j$.

Se comprueba de manera inmediata mediante simples cálculos que, si se verifica que $\det B > 0$ donde $B = (b_{ij})$ entonces el sistema (3.1) satisface las hipótesis del Teorema 2.2.7. y por tanto tendríamos garantizada la existencia del atractor global para dicho sistema. Concretamente, debemos encontrar c_1, c_2, c_3 constantes positivas tales que,

$$\sum_{j=1}^3 c_j b_{ij} > 0 \quad i = 1, 2, 3$$

o sea, $B^* C^* > 0$, donde B^* es la matriz traspuesta de B y C^* es el vector columna de $C = (c_1, c_2, c_3)$. Así el problema planteado se reduce a encontrar

$p \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^3)$ tal que,

$$(B^*)^{-1}p > 0. \quad (3.2)$$

Como $\det(B) > 0$, existe B^{-1} y además si calculamos explícitamente la matriz B^{-1} , se tiene

$$B^{-1} = (d_{ij}) \text{ con } d_{ij} > 0 \quad \forall i, j \quad (3.3)$$

lo que junto con (3.2) nos lleva a que se verifica H_1) y por el Corolario 2.3.6. tenemos la existencia del atractor global para (3.2).

Hacemos notar que por idénticos argumentos, y de una manera más sencilla, el resultado anterior es igualmente válido para cuando en el sistema (3.1) la matriz B sea de 2×2 y el $\det B > 0$. Por tanto, a partir de aquí, tenemos ejemplos concretos donde las condiciones para la existencia del atractor global del sistema se satisfacen, alguno de los cuales analizaremos de manera más precisa en el Capítulo 5.

También podemos comprobar mediante el siguiente ejemplo que esta condición, es decir $\det B > 0$, no resulta suficiente para el caso donde B sea una matriz de 4×4 .

Ejemplo. Dada,

$$B \equiv \begin{pmatrix} 10 & \Leftrightarrow 100 & \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 10 \\ \Leftrightarrow 55 & 10 & \Leftrightarrow 100 & \Leftrightarrow 1 \\ \Leftrightarrow 10 & \Leftrightarrow 1 & 10 & \Leftrightarrow 90 \\ \Leftrightarrow 1 & \Leftrightarrow 5 & \Leftrightarrow 9 & 10 \end{pmatrix},$$

se tiene que $\det B > 0$, y obviamente verifica las condiciones del sistema (3.1), sin embargo si calculamos el $\text{Adj}(a_{11})$ resulta negativo, con lo que en este caso no podemos garantizar (3.3), es decir (3.2) puede no verificarse y la condición de que el $\det B > 0$ no sería suficiente en este caso.

3.2 Teorema de Continuidad.

Tal y como hemos expuesto al comienzo de este capítulo vamos a estudiar la continuidad del atractor global de (2.1), que notamos U^f , respecto de la función f que determina dicho sistema obteniendo un resultado preciso para el caso en el que sea cooperativo, es decir cuando la función f verifique la hipótesis H_3). Para ello es necesario definir unos espacios de funciones, que serán en los que posteriormente nos desenvolveremos.

Definimos \mathcal{F}_T como el espacio de todas las funciones continuas y T-periódicas en t , $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaciendo la propiedad P), al que vamos a dotarlo de la topología \mathcal{T} generada por la siguiente familia de seminormas,

$$\|f\|_K = \max\{\sup\{\|f(t, x)\|\}; (t, x) \in \mathbb{R} \times K\}, \sup\{\|f_x(t, x)\|\}; (t, x) \in \mathbb{R} \times K\}$$

donde K es cualquier subconjunto compacto de \mathbb{R}_+^n . Además de la discusión en "Introduction to Functional Analysis" [61] pag. 143-147, se sigue que dicha topología es metrizable, de hecho es localmente convexa y se verifica que \mathcal{F}_T tienen una métrica invariante por traslaciones, que genera la topología en cuestión.

Definimos también \mathcal{A}_T como el subconjunto de \mathcal{F}_T formado por todas las funciones $f \in \mathcal{F}_T$ que satisfacen $H_1) \Leftrightarrow H_2)$, con el que establecemos la siguiente función,

$$\mathcal{U} : \mathcal{A}_T \rightarrow \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n); \quad \mathcal{U}(f) = U^f. \quad (3.4)$$

Veremos que es una función continua para cada $f \in \mathcal{A}_T$ tal que $U^f > 0$, donde $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ representa el espacio de todas las funciones $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

continuas y T -periódicas provisto de la norma del supremo,

$$\|u\|_0 = \sup\{\|u\|, t \in \mathbb{R}\}.$$

Para c_1, \dots, c_n, m constantes positivas fijas definimos $\Lambda_T(c, m, n)$, como el subconjunto de \mathcal{F}_T formado por aquellas funciones que verifican $H_1)$ y $H_3)$. En particular, según vimos en la demostración del Teorema 2.3.5., podemos afirmar que la relación entre los conjuntos definidos anteriormente es,

$$\Lambda_T(c, m, n) \subset \mathcal{A}_T \subset \mathcal{F}_T.$$

Veamos en primer lugar una propiedad de monotonía para los atractores globales, respecto del orden usual en el espacio de funciones.

Proposición 3.2.1. *Sean f, g dos funciones de Λ_T con $g \leq f$. Entonces se verifica que $U^g \leq U^f$.*

Demostración. Si $v(t)$ es una solución positiva de $x'_i = x_i g_i(t, x)$, por el Teorema 2.3.5. tenemos,

$$v(t) \Leftrightarrow U^g(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty. \quad (3.5)$$

Por otra parte, si $u(t)$ es una solución de (2.1) con $u(0) \geq v(0)$, dado que $g \leq f$, tenemos que por el Teorema 1.3.4.,

$$u(t) \geq v(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (3.6)$$

También tenemos que por el Teorema 2.3.5.

$$u(t) \Leftrightarrow U^f(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty, \quad (3.7)$$

restando (3.7) y (3.5) nos queda que,

$$\left[(u(t) \Leftrightarrow v(t)) \Leftrightarrow (U^f(t) \Leftrightarrow U^g(t)) \right] \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty,$$

lo que junto con (3.6) implica,

$$U^f(t) \geq U^g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ya que U^f , U^g son funciones T-periódicas. ■

Teorema 3.2.2. *Si el atractor global U^f de (2.1) es positivo. Entonces la función definida en (3.4) es continua en f .*

Demostración. Sea $\mathcal{C}_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ el espacio de todas las funciones continuamente diferenciables y T-periódicas $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ provisto de la norma $\|u\|_1 = \max\{\|u\|_0, \|u'\|_0\}$ y sea $\mathcal{P} = \{u \in \mathcal{C}_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : u > 0\}$.

Definimos $\Phi : \mathcal{P} \times \mathcal{A}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ como $\Phi(x, g) = x' \Leftrightarrow G(\cdot, x)$, donde $G(t, x) = (x_1 g_1(t, x), \dots, x_n g_n(t, x))$ para $g = (g_1, \dots, g_n)$ y $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. De esta manera los ceros de la función Φ corresponden con las soluciones T-periódicas positivas del sistema,

$$x'_i = x_i g_i(t, x) \quad 1 \leq i \leq n. \quad (3.8)$$

Se prueba que Φ es continua y además posee derivada parcial continua $\Phi_x : \mathcal{P}_T \times \mathcal{A}_T \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{C}_T^1, \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n))$.

De hecho,

$$\Phi_x(x, g)u = u' \Leftrightarrow G_x(\cdot, x)u \quad (3.9)$$

Veamos que $\Phi_x(U^f, f)$ es invertible, para lo cual suponemos la existencia de w tal que $\Phi_x(U^f, f)w = 0$ luego por (3.9) tenemos,

$$w'_i = f_i(t, U^f(t))w_i + U_i^f(t) \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, U^f(t))w_j \quad 1 \leq i \leq n,$$

si hacemos el cambio de variable $v_i = \frac{w_i}{U_i^f}$, el sistema queda,

$$v'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, U^f(t))U_j^f(t)v_j, \quad (3.10)$$

el cual tiene por solución $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Sea $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, U^f(t))U_j^f(t) \right)$, por H_1 ,

$$c_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(t, U^f(t))U_i^f(t) + \sum_{j \in J_i} c_j \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, U^f(t)) \right| U_j^f(t) \leq \Leftrightarrow m U_i^f(t) < 0$$

también A es continua y T-periódica, luego por la Proposición 2.3.1. el radio espectral de $\Psi(T)$ es menor que uno, para Ψ matriz fundamental de (3.10), lo que significa que $\Psi(T) \Leftrightarrow I$ es invertible. Por tanto por el Teorema 1.4.5. tenemos que $v = 0$. Esto prueba que $\Phi_x(U^f, f)$ es inyectiva y por la teoría de Fredholm tenemos que $\Phi_x(U^f, f)$ es un isomorfismo.

Como U^f es una solución T-periódica del sistema (2.1), se verifica que $\Phi(U^f, f) = 0$, además $\Phi_x(U^f, f)$ es invertible, luego por el Teorema A.2.1. de la Función Implícita del Apéndice, existe una función continua $\varphi : N \rightarrow \mathcal{P}$ definida en un entorno N de f tal que $\varphi(f) = U^f$ y donde $\Phi(\varphi(g), g) = 0$ para toda $g \in N$.

Por la continuidad de la función φ y dado que $U^f > 0$, podemos suponer que $\varphi(g) > 0 \quad \forall g \in N$. Por tanto según hemos definido Φ , tenemos que

$\varphi(g)$ es una solución T-periódica del sistema (3.9), que además es positiva. Pero también $\mathcal{U}(g) = U^g$ es solución T-periódica positiva de dicho sistema, de donde fácilmente deducimos,

$$\varphi(g) \equiv U^g = \mathcal{U}(g).$$

Por tanto $\varphi \equiv \mathcal{U}$, lo que completa la prueba. ■

Para poder generalizar el teorema anterior al caso en el que el atractor U^f pueda poseer componentes nulas, necesitamos verificar antes los siguientes resultados.

Lema 3.2.3. *Dada $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \times \Lambda_T(c, m, n) \rightarrow \mathbb{R}^n$,*

$$F(t, x, g) = (x_1 g_1(t, x), \dots, x_n g_n(t, x)),$$

entonces F es continua y localmente lipschitziana.

Demostración. Para ver la continuidad definimos,

$$H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \times \Lambda_T(c, m, n) \rightarrow \mathbb{R}^n ; \quad H(t, x, g) = g(t, x),$$

$$D : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n ; \quad D(x, y) = (x_1 y_1, \dots, x_n y_n) \quad (3.11)$$

Obviamente D es continua, por tanto F lo será si también lo es H . Sin embargo esta afirmación se sigue de la convergencia en \mathcal{F}_T ($f_n \xrightarrow{\mathcal{F}_T} f$), ya que esta supone convergencia uniforme en $\mathbb{R} \times K$ de las f_n a f , junto con las derivadas $(f_n)_x$ a f_x .

Para ver que F es localmente lipschitziana respecto de x , fijamos $(t_0, x_0, g_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \times \Lambda_T(c, m, n)$, con lo que debemos encontrar entornos $N_{t_0}, N_{x_0}, N_{g_0}$

de t_0, x_0, g_0 respectivamente y una constante $L > 0$ tal que,

$$\|F(t, x, g) \Leftrightarrow F(t, z, g)\| \leq L \|x \Leftrightarrow z\|$$

$$\text{si } t \in N_{t_0}, \quad x, y \in N_{x_0}, \quad g \in N_{g_0}.$$

Recordamos que $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$ de manera que, $\|D(x, y)\| \leq n \|x\| \|y\|$ para D la función definida en (3.11). De aquí,

$$\|F(t, x, g) \Leftrightarrow F(t, z, g)\| = \|D(x, H(t, x, g)) \Leftrightarrow D(z, H(t, z, g))\| \leq$$

$$\leq \|D(x, H(t, x, g)) \Leftrightarrow D(z, H(t, x, g))\| + \|D(z, H(t, x, g)) \Leftrightarrow D(z, H(t, z, g))\|$$

y usando la bilinealidad de D , queda

$$\|F(t, x, g) \Leftrightarrow F(t, z, g)\| \leq n \|x \Leftrightarrow z\| \|g(t, x)\| + n \|z\| \|g(t, x) \Leftrightarrow g(t, z)\|. \quad (3.12)$$

Ya que $(g_0)_x$ es continua, existe $r > 0$ tal que,

$$\|(g_0)_x(t, x) \Leftrightarrow (g_0)_x(t_0, x_0)\| \leq 1 \quad \text{si } |t \Leftrightarrow t_0| \leq r \quad \|x \Leftrightarrow x_0\| \leq r.$$

Es decir,

$$\|(g_0)_x(t, x)\| \leq L_0 := 1 + \|(g_0)_x(t_0, x_0)\| \quad (3.13)$$

con $|t \Leftrightarrow t_0| \leq 1$ y $x \in K := \{x \in \mathbb{R}_+^n : \|x \Leftrightarrow x_0\| \leq r\}$. Fijamos $g \in B_K(g_0, 1)$, entonces

$$\|g(t, x) \Leftrightarrow g_0(t, x)\| < 1 \quad , \quad \|g_x(t, x) \Leftrightarrow (g_0)_x(t, x)\| < 1 \quad \forall t \in R \quad \forall x \in K.$$

De aquí y de (3.13),

$$\|g(t, x)\| \leq 1 + \|g_0(t, x)\| ; \quad \|g_x(t, x)\| \leq 1 + \|(g_0)_x(t, x)\| \leq L_1 := 1 + L_0, \quad (3.14)$$

donde $|t \Leftrightarrow t_0| \leq r$, $x \in K$ y $g \in B_K(g_0, 1)$.

Sea $M_0 = \sup\{\|g_0(t, x)\|; |t \Leftrightarrow t_0| \leq r \ \|x \Leftrightarrow x_0\| \leq r\}$, entonces $\|g(t, x)\| \leq 1 + M_0$ y de (3.12),

$$\|F(t, x, g) \Leftrightarrow F(t, z, g)\| \leq nM_1\|x \Leftrightarrow z\| + n[r + \|x\|]L_1\|x \Leftrightarrow z\|,$$

con $x, z \in K$, $|t \Leftrightarrow t_0| < r$ y $g \in B_K(g_0, 1)$, ya que $\|z \Leftrightarrow x_0\| \leq r$ y de (3.14) junto con el teorema del valor medio,

$$\|g(t, x) \Leftrightarrow g(t, z)\| \leq \|x \Leftrightarrow z\| \sup_{\xi \in [x, z]} \|g_x(t, \xi)\|,$$

donde ξ varia en el segmento lineal que une x con z .

El resultado se termina tomando $L = nM_1 + nL_1[r + \|x_0\|]$. ■

Lema 3.2.4. *Sea $u : K \times \Lambda \rightarrow X$ una aplicación continua, con K, Λ, X espacios métricos y K compacto. Entonces dada $g_0 \in \Lambda$ y $\epsilon > 0$, existe N entorno de g_0 tal que,*

$$d(u(\xi, g), u(\xi, g_0)) \leq \epsilon \quad \forall \xi \in K, \quad \forall g \in N.$$

Demostración. Dado $\xi_0 \in K$ por la continuidad de la función u , existe un entorno $N(\xi_0)$ de g_0 en Λ y un entorno $V(\xi_0)$ de ξ_0 en K tal que

$$d(u(\xi, g), u(\xi_0, g_0)) \leq \epsilon \quad \forall g \in N(\xi_0), \quad \forall \xi \in V(\xi_0). \quad (3.15)$$

Como $\{V(\xi_0); \xi_0 \in K\}$ determina un recubrimiento de abiertos de K y éste es compacto, existe $\xi_1, \dots, \xi_q \in K$ tal que $V(\xi_1), \dots, V(\xi_q)$ cubren a K . De donde tomando $N = N(\xi_1) \cap \dots \cap N(\xi_q)$ y (3.15) se completa facilmente la prueba. ■

Proposición 3.2.5. *Dada $f \in \Lambda_T(c, m, n)$, existe un entorno N de f tal que el conjunto $\{U^g; g \in N\}$ está acotado en $\mathcal{C}_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Fijamos en primer lugar un entorno N_0 de f en $\Lambda_T(c, m, n)$ tal que,

$$\sup\{\|g(t, 0)\|; g \in N_0, t \in \mathbb{R}\} < +\infty. \quad (3.16)$$

Dada $g \in N_0$ y $U^g = (U_1^g, \dots, U_n^g)$, definimos $I_g := \{i \in \{1, \dots, n\}; U_i^g > 0\}$, de esta manera podemos establecer la siguiente función

$$\varphi_g(t, x) = \sum_{j \in I_g} c_j g_j(t, x) \quad \text{si } I_g \neq \emptyset,$$

y

$$\varphi_g(t, x) \equiv 0 \quad \text{si } I_g = \emptyset.$$

Por tanto para $i \in I_g$ tenemos,

$$\frac{\partial \varphi_g}{\partial x_i}(t, x) = \sum_{j \in I_g} c_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(t, x) \leq \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(t, x) \leq \Leftrightarrow m$$

ya que g satisface $H_1)$ y $H_3)$.

Por otra parte, $U_i^g \equiv 0$ si $i \notin I_g$, lo que junto con el teorema del valor medio implica la existencia de $\xi_t \in \mathbb{R}_+^n$ tal que

$$\begin{aligned} \varphi_g(t, U^g(t)) &\Leftrightarrow \varphi_g(t, 0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_g(t, \xi_t)}{\partial x_i} U_i^g(t) \\ &\leq \Leftrightarrow m \sum_{i \in I_g} U_i^g(t) = \Leftrightarrow m \sum_{i=1}^n U_i^g(t) = \Leftrightarrow m \|U^g(t)\|. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Por (3.16) existe una constante $M_0 > 0$ tal que $\varphi_g(t, 0) \leq M_0$ para todo $g \in N_0$ y $t \in \mathbb{R}$ y así de (3.17) se tiene,

$$\varphi_g(t, U^g(t)) \leq \varphi_g(t, 0) \Leftrightarrow m \|U^g(t)\| \leq M_0 \Leftrightarrow m \|U^g(t)\|.$$

Definimos,

$$W_g := \sum_{j \in I_g} c_j \ln U_j^g(t); \quad g \in N_0$$

de donde,

$$W'_g = \varphi_g(t, U^g(t)) \leq M_0 \Leftrightarrow m \|U^g(t)\|, \quad (3.18)$$

pero dado que W_g es T -periódica, entonces $W'_g(t_g) = 0$ para algún $t_g \in [0, T]$ y por (3.18) existe $R_0 > 0$ tal que,

$$\|U^g(t_g)\| \leq R_0 \quad \forall g \in N_0. \quad (3.19)$$

Dada $g = (g_1, \dots, g_n) \in N_0$, denotamos por $u(t, \rho, \xi, g)$ la solución del problema,

$$x'_i = x_i g_i(t, x); \quad 1 \leq i \leq n, \quad x(\rho) = \xi,$$

con $\rho \in [0, T]$ y $\xi \in \mathbb{R}_+^n$.

Por el Lema 3.2.3. $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \times \Lambda_T(c, m, n) \rightarrow \mathbb{R}^n$; $F(t, x, g) = G(t, x) = (x_1 g_1(t, x), \dots, x_n g_n(t, x))$ es continua y localmente lipschitziana, entonces también lo es u como función de sus cuatro variables, de donde si tomamos en el Lema 3.2.4. $K = \{(t, \rho, x); \rho \in [0, T], t \in [\rho, \rho+T], \|x\| \leq R_0\}$; $\Lambda = \Lambda_T(c, m, n)$ y $X = \mathbb{R}^n$, existe un entorno N_1 de f contenido en N_0 tal que

$$\|u(t, \rho, x, g) \Leftrightarrow u(t, \rho, x, f)\| \leq 1,$$

para $g \in N_1$, $\rho \in [0, T]$, $t \in [\rho, \rho + T]$, $\|x\| \leq R_0$.

De donde, existe $R > 0$ tal que,

$$\|u(t, \rho, x, g)\| \leq R, \quad (3.20)$$

para $g \in N_1$, $\rho \in [0, T]$, $t \in [\rho, \rho + T]$ y $\|x\| \leq R_0$.

Fijamos ahora un entorno N de f contenido en N_1 de manera que,

$$\|g(t, x) \Leftrightarrow f(t, x)\| \leq 1 \quad \text{si } g \in N \text{ y } \|x\| \leq R,$$

entonces existe $M > 0$ verificando,

$$\|g(t, x)\| \leq M \quad \text{si } g \in N \text{ y } \|x\| \leq R,$$

en particular como $\|x\| \leq R$, se tiene

$$\|G(t, x)\| \leq M \quad \text{si } g \in N \text{ y } \|x\| \leq R, \quad (3.21)$$

para $G(t, x) = (x_1 g_1(t, x), \dots, x_n g_n(t, x))$.

Por otra parte $U^g(t) = u(t, t_g, U^g(t_g), g)$; así para cada $t \in [t_g, t_g + T]$,

$$\|U^g(t) \Leftrightarrow U^g(t_g)\| = \|u(t, t_g, U^g(t_g), g) \Leftrightarrow u(t_g, t_g, U^g(t_g), g)\| \leq$$

$$|t \Leftrightarrow t_g| \sup\{\|u'(s, t_g, U^g(t_g), g)\|; \quad s \in [t_g, t_g + T]\} \leq$$

$$T \cdot \sup\{\|G(t, u(t, \rho, x, g))\|; \quad g \in N_1, \quad \rho \in [0, T], \quad t \in [\rho, \rho + T] \text{ y } \|x\| \leq R_0\}$$

de donde por (3.20),

$$\|U^g(t) \Leftrightarrow U^g(t_g)\| \leq T \cdot \sup\{\|G(t, z)\|; \quad \|z\| \leq R, \quad g \in N\},$$

y por (3.21),

$$\|U^g(t) \Leftrightarrow U^g(t_g)\| \leq MT \quad \forall g \in N \quad t \in [t_g, t_g + T].$$

Lo que junto con (3.19), implica que $\{U^g : g \in N\}$ es acotado en $\mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Como la acotación es en $\mathcal{C}_T^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, necesitamos comprobar que también están acotadas las derivadas, pero sabemos que $(U^g)' = G(t, U^g)$.

Tomando un entorno de f incluido en N (el cual por comodidad en la notación vamos a escribir igual) donde,

$$\|g(t, x) \Leftrightarrow f(t, x)\| \leq 1 \quad \text{si } \|x\| \leq R_0 + MT, \quad g \in N$$

y por análogo razonamiento al empleado anteriormente, se tiene

$$\|G(t, x)\| \leq \bar{M} \quad \text{para } \|x\| \leq R_0 + MT, \quad g \in N$$

de donde concluimos, $\|(U^g)'(t)\| \leq \bar{M} \quad \forall g \in N$. ■

Teorema 3.2.6. *La función $\mathcal{U} : \Lambda_T(c, m, n) \rightarrow \mathcal{C}_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$; $\mathcal{U}(f) = U^f$, es continua.*

Demostración. Sea $f \in \Lambda_T(c, m, n)$, y definamos el siguiente conjunto de índices, $I := \{i \in \{1, \dots, n\} \ ; U_i^f > 0\}$.

Caso 1. Si $I = \emptyset$, $U_i^f = 0 \quad \forall i$. Sea N el entorno determinado por la Proposición 3.2.5. y supongamos que existe una sucesión $\{g^k\} \rightarrow f$ tal que

$$\inf\{\|U^{g^k}\|; k \in \mathbb{N}\} > 0 \tag{3.22}$$

Como N es entorno de f podemos suponer que $g^k \in N$, con lo que por la Proposición 3.2.5. tendríamos que las funciones U^{g^k} estarían acotadas al igual que sus derivadas, y por el Teorema de Ascoli existe una parcial convergente que por simplicidad en la notación la llamamos igual, es decir,

$$\{U^{g^k}\} \rightarrow W \quad \text{uniformemente en un compacto,}$$

con $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ función T-periódica, además por el Teorema de Intercambio de Límites con Derivadas tenemos que W es solución de (2.1).

Sea z una solución positiva de (2.1) con $z(0) > W(0)$, por el Corolario 1.3.5., llegamos a que

$$z(t) \geq W(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Del Teorema 2.2.7. sabemos que $z(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, por tanto $W(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y así,

$$\{U^{g^k}(t)\} \rightarrow 0 \quad \text{uniformemente en } t,$$

lo cual contradice (3.22) y completa la prueba en este caso.

Caso 2. Supongamos ahora que $I \neq \emptyset$, donde reordenando podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I = \{1, \dots, p\}$.

Definimos $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_p) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ como,

$$\bar{g}_i(t, y_1, \dots, y_p) := g_i(t, y_1, \dots, y_p, 0, \dots, 0),$$

para $g \in N$ con N el entorno determinado por la Proposición 3.2.5.

Es inmediato que $\bar{g} \in \Lambda_T(c, m, p)$ y que la función,

$$\Lambda_T(c, m, n) \rightarrow \Lambda_T(c, m, p); \quad g \mapsto \bar{g},$$

es continua. En particular por el Teorema 2.2.7. el sistema,

$$y_i' = y_i \bar{g}_i(t, y) \tag{3.23}$$

tiene un atractor global que notamos V^g . Es fácil comprobar que (U_1^f, \dots, U_p^f) es solución de (3.23) para \bar{f} , además por la unicidad de la solución T-periódica

tenemos que se verifica que $V^f = (V_1^f, \dots, V_p^f) = (U_1^f, \dots, U_p^f) > 0$ y como la función \mathcal{U} definida en (3.4) es continua, tenemos que $V^g > 0$ para toda $g \in N$.

Sea $x = (x_1, \dots, x_n)$ solución positiva del sistema,

$$x'_i = x_i g_i(t, x) \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por H_3) tenemos

$$x'_i > x_i \bar{g}_i(t, x_1, \dots, x_p), \quad 1 \leq i \leq p$$

por tanto (x_1, \dots, x_p) es una supersolución de (3.23), así tomando la solución y de (3.23) que satisface $y_i(0) = x_i(0) \quad 1 \leq i \leq p$, se llega por el Teorema 1.3.4. a que $x_i(t) \geq y_i(t) \quad \forall t \geq 0 \quad 1 \leq i \leq p$.

Como del Teorema 2.2.7., tenemos que,

$$x_i(t) \Leftrightarrow U_i^g(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$y_i(t) \Leftrightarrow V_i^g(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow +\infty \quad 1 \leq i \leq p,$$

podemos deducir que,

$$U_i^g \geq V_i^g \quad 1 \leq i \leq p \quad \forall g \in N. \quad (3.24)$$

Razonando nuevamente por reducción al absurdo, suponemos que existe una sucesión $\{g^k\} \rightarrow f$ tal que

$$\inf\{\|U^{g^k} \Leftrightarrow U^f\|; \quad k \in \mathbb{N}\} > 0 \quad (3.25)$$

por el mismo argumento al empleado en el Caso 1, tenemos que $\{U^{g^k}\}$ converge uniformemente en compactos, para W función análoga a la obtenida en el Caso 1.

También por (3.24) deducimos, $U_i^{g^k} \geq V_i^{g^k}$ $1 \leq i \leq p$, de donde tomando límites cuando $k \rightarrow +\infty$ se llega a que,

$$W_i \geq V_i^f = U_i^f \quad 1 \leq i \leq p,$$

y por tanto $W \geq U^f$ ya que $U_i^f = 0 \quad \forall i > p$.

Sea z una solución positiva de (2.1). Igual que en el Caso 1, tenemos que,

$$z(t) \geq W(t) \geq U^f(t) \quad \forall t \geq 0.$$

De donde por el Teorema 2.2.7. se tiene que $W(t) \Leftrightarrow U^f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, con lo que se tiene que $W \equiv U^f$ dado que ambas son soluciones T-periódicas. Por tanto, $\{U^{g^k}(t)\} \rightarrow U^f(t)$ uniformemente en t , lo cual contradice a (3.25). ■

3.3 Caracterización del Atractor global

Vamos a tratar ahora de caracterizar de una manera precisa al atractor global del sistema (2.1), para lo cual probaremos el siguiente resultado.

Proposición 3.3.1. *Sea U^f la solución T-periódica dada por el Teorema 2.2.7. y supongamos que $U_i^f = 0$ para algún i . Entonces,*

$$\int_0^T f_i(t, U^f(t)) dt \leq 0.$$

Demostración. Supongamos por absurdo que esto no ocurre, es decir

$$\int_0^T f_i(t, U^f(t)) dt > 0 \tag{3.26}$$

y sea u una solución de (2.1) tal que $u(0) > 0$. Definimos, para $k \in \mathbb{N}$, $u^k(t) = u(t + kT)$; como por el Teorema 2.2.7. $u(t) \Leftrightarrow U^f(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$, concluimos que,

$$u^k(t) \rightarrow U^f(t) \text{ cuando } k \rightarrow +\infty, \text{ uniformemente en } [0, T]$$

Por otra parte, integrando la relación

$$\frac{u'_i(t)}{u_i(t)} = f_i(t, u(t))$$

en $[kT, kT + T]$; $k \in \mathbb{N}$; obtenemos después de un cambio de variable

$$\ln \frac{u_i(kT + T)}{u_i(kT)} = \int_{kT}^{kT+T} f_i(t, u(t)) dt = \int_0^T f_i(t, u^k(t)) dt$$

de donde,

$$\ln \frac{u_i(kT + T)}{u_i(kT)} \rightarrow \int_0^T f_i(t, U^f(t)) dt \text{ cuando } k \rightarrow +\infty$$

De aquí y de (3.26), la sucesión $\{u_i(kT)\}$ es estrictamente creciente a partir de un cierto término y en consecuencia no puede converger a $U_i^f(0) = 0$, lo que completa la prueba. ■

Corolario 3.3.2. Si $\int_0^T f_i(t, 0) dt \geq 0 \quad \forall i$ y $\int_0^T f_k(t, 0) dt > 0$ para algún k , Entonces $U^f = (U_1^f, \dots, U_n^f) > 0$.

Demostración. Si $U_j^f = 0$ para algún j , se sigue de la Proposición 3.3.1. y de la hipótesis H_3) que $0 \leq \int_0^T f_j(t, 0) dt \leq \int_0^T f_j(t, U^f(t)) dt \leq 0$. Es decir, $\int_0^T f_j(t, 0) dt = \int_0^T f_j(t, U^f(t)) dt$, y usando H_3), una vez más, concluimos que $U^f \equiv 0$. En particular, $U_k^f = 0$, y de la Proposición 3.3.1., tenemos $\int_0^T f_k(t, 0) dt = \int_0^T f_k(t, U^f(t)) dt \leq 0$. Esta contradicción termina la prueba. ■

Vamos a comprobar mediante el siguiente resultado que la propiedad expresada en la Proposición 3.3.1., caracteriza a los atractores globales del sistema (2.1).

Teorema 3.3.3. *Sea I un subconjunto estricto de $\{1, \dots, n\}$ y supongamos que existe una familia $\{W_i : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)\}$ con $i \in I$ de funciones T -periódicas y continuamente diferenciables tales que,*

$$W'_i = W_i f_i(t, \sum_{j \in I} W_j e_j) \quad i \in I \quad (3.27)$$

donde e_1, \dots, e_n denotan los vectores de la base canónica de \mathbb{R}^n . Si,

$$\int_0^T f_i(t, \sum_{j \in I} W_j e_j) dt \leq 0 \quad \forall i \notin I. \quad (3.28)$$

Entonces,

$$U_i^f \equiv W_i \quad \forall i \in I \quad ; \quad U_i^f \equiv 0 \quad \forall i \notin I,$$

donde U^f es la solución T -periódica dada en el Teorema 2.2.7..

Demostración. Definimos $V = (V_1, \dots, V_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$, como $V_i = W_i \quad \forall i \in I$ y $V_i = 0 \quad \forall i \notin I$, es claro que V es T -periódica y además es solución de (2.1), más aún el linealizado de (2.1) en V es,

$$\begin{aligned} y'_i &= f_i(t, V(t))y_i + V_i(t) \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, V(t))y_j \quad i \in I \\ y'_i &= f_i(t, V(t))y_i \quad i \notin I. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Mediante el cambio de variable,

$$z_i = \frac{y_i}{V_i} \quad i \in I; \quad z_i = y_i \quad i \notin I,$$

el sistema (3.29) queda,

$$\begin{aligned} z'_i &= \sum_{j \in I} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, V(t)) V_j(t) z_j + \sum_{j \notin I} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, V(t)) z_j \quad i \in I \\ z'_i &= f_i(t, V(t)) z_i \quad i \notin I. \end{aligned}$$

Si notamos $\Phi(t)$ a la matriz fundamental del sistema anterior, con $\Phi(0) = \text{Identidad}$, tenemos que si suponemos que $I = \{1, \dots, p\}$, dicha matriz sería de la forma,

$$\Phi(T) = \left(\begin{array}{c|c} \Psi(T) & \Theta(T) \\ \hline 0 & D(T) \end{array} \right),$$

donde $\Psi(T)$ es la matriz fundamental del sistema,

$$z'_i = \sum_{j \in I} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, V(t)) V_j(t) z_j ; \quad i \in I$$

con $\Psi(0) = \text{Identidad}$. Mientras que $D(T)$ es la matriz diagonal,

$$D(T) = \text{diagonal} \left(\exp \left(\int_0^T f_{p+1}(t, V(t)) dt \right), \dots, \exp \left(\int_0^T f_n(t, V(t)) dt \right) \right).$$

Por tanto los autovalores de $\Phi(T)$ son,

$$\exp \left(\int_0^T f_i(t, V(t)) dt \right) \quad \text{para } i \notin I$$

junto con los correspondientes a los de $\Psi(T)$.

Por la Proposición 2.3.1. el radio espectral de $\Psi(T)$ es menor que uno, con lo que también será cierto para $\Phi(T)$ si las desigualdades de (3.28) son estrictas.

Entonces si las desigualdad (3.28) es estricta, tenemos que V es atractor local de (2.1), y la demostración en este caso se sigue fácilmente por el Teorema 2.3.5.

Para demostrar el caso general, tomamos $\epsilon > 0$ y definimos $f^\epsilon = (f_1^\epsilon, \dots, f_n^\epsilon)$ como $f_i^\epsilon(t, x) = f_i(t, x) \quad \forall i \in I$ y $f_i^\epsilon(t, x) = f_i(t, x) \pm \epsilon \quad \forall i \notin I$. Es claro que (3.27) es satisfecha si reemplazamos f por f^ϵ .

Por otra parte de (3.28),

$$\int_0^T f_i^\epsilon(t, \sum_{j \in I} W_j(t, e_j)) dt \leq 0 \quad \forall i \notin I;$$

y del caso anterior se tiene que,

$$U_i^{f^\epsilon} = W_i \quad \forall i \in I \quad \text{y} \quad U_i^{f^\epsilon} = 0 \quad \forall i \notin I.$$

La prueba se completa fácilmente tomando límites cuando $\epsilon \rightarrow 0$. y usando el Teorema 3.2.6. sobre la continuidad del atractor global respecto de la función del sistema que lo determina. ■

Corolario 3.3.4. *Supongamos que,*

$$\int_0^T f_i(t, 0) dt \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Entonces, $U^f \equiv 0$.

Demostración. Basta considerar $I = \emptyset$ en el Teorema 3.3.3. ■

Ejemplo. Supongamos $n = 2$ y escribamos $a_i = \int_0^T f_i(t, 0) dt$. Por el Corolario 3.3.2. tenemos que si $a_i \geq 0$ y $a_1 + a_2 > 0$, entonces $U^f > 0$. También sabemos del Corolario 3.3.4., que $U^f \equiv 0$ si $a_i \leq 0$. Queda por analizar el caso en que a_1, a_2 tienen signo opuesto. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_1 < 0 < a_2$. Denotemos por U_2 la única solución T-periódica positiva de la ecuación logística

$$z' = z f_2(t, 0, z). \tag{3.30}$$

Si $\int_0^T f_1(t, 0, U_2(t))dt \leq 0$, entonces del Teorema 3.3.3. se tiene que $U^f = (0, U_2)$. Mostraremos ahora que si

$$\int_0^T f_1(t, 0, U_2(t))dt > 0, \quad (3.31)$$

entonces $U^f := (U_1^f, U_2^f) > 0$. Con este fin, supongamos primero que $U_1^f = 0$. De la Proposición 3.3.1., tenemos

$$\int_0^T f_1(t, 0, U_2^f)dt \leq 0. \quad (3.32)$$

También de la Proposición 3.3.1., $U^f \neq 0$, ya que $a_2 > 0$ y vale H_3 . De aquí, $U_2^f > 0$, y en consecuencia, $U_2^f = U_2$, puesto que (3.30) posee una única solución T-periódica positiva. Usando (3.32) tenemos $\int_0^T f_1(t, 0, U_2(t))dt \leq 0$, lo cual contradice (3.31) y prueba que $U_1^f > 0$.

Si fuera $U_2^f = 0$, se tendrá de la Proposición 3.3.1. y de H_3 que, $a_2 < \int_0^T f_2(t, U_1^f(t), 0)dt \leq 0$, y esta contradicción termina la demostración. ■

Capítulo 4

Modelo Depredador-Presa.

4.1 Introducción

Los modelos depredador-presa han sido y son objeto de estudio en la teoría sobre la dinámica de poblaciones. El primer estudio lo realizan de forma paralela Lotka(1925) y Volterra(1928), donde adoptando el principio de acción de masas proponen el siguiente modelo,

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= aN \Leftrightarrow bNP \\ \frac{dP}{dt} &= cNP \Leftrightarrow dP\end{aligned}$$

donde N y P son las densidades poblacionales de presa y depredador, a y d es la tasa de cambio percapita en ausencia el uno del otro, b y c la tasa de cambio debida a la interacción. Poco después Nicholson y Bailey (1935) proponen un modelo discreto en el tiempo sobre la interacción de insectos y sus huéspedes. A partir de aquí son muchos los autores que han realizado estudios sobre este tipo de modelos poblacionales, entre otros podemos citar Solomon (1949), Holling(1959), Berryman (1981), Ardity-Ginzburg (1989), Aydity-Berryman

(1991).

En este capítulo estudiamos un modelo depredador-presa consistente en n -presas y un depredador, donde se considera que las presas en ausencia del depredador se desarrollan bajo un sistema Kolmogorov de los que hemos denominado de tipo cooperativo. Esta condición la suponemos con el fin de poder utilizar todos los resultados obtenidos para este tipo de sistemas en los capítulos anteriores.

De forma más concreta, supongamos el siguiente sistema:

$$x'_i = x_i f_i(t, x_1, \dots, x_n, y) \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.1)$$

$$y' = yg(t, x_1, \dots, x_n, y), \quad (4.2)$$

donde $f_1, \dots, f_n, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, T -periódicas y con derivadas parciales continuas respecto de todas sus variables x_1, \dots, x_n, y .

Desarrollaremos unos esquemas iterativos siguiendo la idea planteada por López-Gómez, Ortega y Tineo [48], para de esta manera obtener una cuenca de atracción para las soluciones de (4.1) y (4.2), donde además bajo determinadas condiciones se tendrá un resultado de extinción para el depredador.

Tal y como hemos comentado anteriormente, para poder aplicar convenientemente los resultados conseguidos en capítulos anteriores así como otros ya conocidos sobre la ecuación de logística, suponemos que las funciones f_i para $i = 1, \dots, n$ y g verifican las siguientes condiciones,

$$A_1) \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} > 0 \quad \forall i \neq j; \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_i} < 0; \quad \frac{\partial f_i}{\partial y} < 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} > 0 > \frac{\partial g}{\partial y} \quad i = 1, \dots, n$$

$A_2)$ Existen constantes positivas c_1, \dots, c_n, m verificando,

$$\sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(t, x, y) \leq \Leftrightarrow m \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

con $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $y \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, dada $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ función continua y T -periódica, definimos

$$f^V(t, x) = f(t, x, V(t))$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Como f verifica las hipótesis $A_1) \Leftrightarrow A_2)$, es fácil comprobar que f^V pertenece al conjunto $\Lambda_T(c, m, n)$ definido en el capítulo anterior. Además según hemos visto en el Teorema 2.3.5., se tiene que el sistema

$$x'_i = x_i f_i^V(t, x), \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.3)$$

posee un atractor global que vamos a notar como $\theta(V)$.

Igualmente serán necesarios algunos de los resultados de la ecuación de logística enunciados en el Capítulo 1, para lo cual supondremos que la función g verifica la siguiente propiedad,

$$A_3) \quad \int_0^T g(t, \theta(0)(t), R) dt < 0 \quad \text{para algún } R > 0.$$

Hacemos notar que $\theta(0)$ es el atractor del sistema

$$x'_i = x_i f_i(t, x, 0) \quad 1 \leq i \leq n \quad (4.4)$$

cuya existencia está garantizada por el Teorema 2.3.5.

Análogamente dada una función continua y T-periódica $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ tal que $U \leq \theta(0)$ tenemos que la ecuación de logística,

$$y' = yg(t, U(t), y) \quad (4.5)$$

posee un atractor global, ya que por A_3) se tiene

$$\int_0^T g(t, U(t), R)dt < 0 \quad \text{para algún } R > 0,$$

lo que junto con el Teorema 1.5.8. nos garantiza la existencia de dicho atractor, el cual notamos por $\varphi(U)$. Además se verifica que,

$$\begin{aligned} \varphi(U) &\equiv 0 \quad \text{si} \quad \int_0^T g(t, U(t), 0)dt \leq 0, \\ \varphi(U) &> 0 \quad \text{si} \quad \int_0^T g(t, U(t), 0)dt > 0. \end{aligned}$$

4.2 Esquemas Iterativos.

Utilizando la misma notación empleada en la sección anterior para los atractores de (4.3),(4.5) y siguiendo la idea de López-Gómez, Ortega y Tineo en [48], planteamos el siguiente esquema iterativo,

$$V^0 \equiv 0; \quad U^N = \theta(V^{N-1}); \quad V^N = \varphi(U^N) \quad N \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Lo primero es hacer notar que según las condiciones que hemos visto en la introducción, claramente (4.6) está bien definido y además se verifican las siguientes condiciones de monotonía,

$$\begin{aligned} U^1 &\geq U^3 \geq \dots \geq U^{2N-1} \geq U^{2N} \geq \dots \geq U^4 \geq U^2 \geq 0 \\ V^1 &\geq V^3 \geq \dots \geq V^{2N-1} \geq V^{2N} \geq \dots \geq V^4 \geq V^2 \geq V^0 \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Para comprobar de una manera más explícita las anteriores condiciones de monotonía, estudiamos con mayor detalle cómo se desarrollan algunas de las iteraciones del esquema (4.6). Se comienza reemplazando y por $V^0(t)$ en (4.1) con lo que llegamos al sistema (4.4), el cual sabemos que por el Teorema 2.3.5. posee un atractor global $U^1 = \theta(V^0) \geq 0$. Siguiendo con el esquema tomamos dicho atractor y lo sustituimos en (4.2) en lugar de x , obteniendo así la ecuación,

$$y' = yg(t, U^1(t), y). \quad (4.8)$$

Por A_3) y el Teorema 1.5.8., existe $V^1 = \theta(U^1) \geq 0$ atractor global de la ecuación (4.8). De esta manera avanzando un paso más en el proceso, sustituimos y por $V^1(t)$ en (4.1) obteniéndose,

$$x'_i = x_i f_i(t, x, V^1(t)). \quad (4.9)$$

Por la monotonía de la función f_i (ver A_1), se tiene que

$$f_i(t, x, V^1(t)) \leq f_i(t, x, 0)$$

ya que $V^1 \geq 0$.

Por tanto, de la Proposición 3.2.1., se comprueba que

$$U^2 \leq U^1, \quad (4.10)$$

donde U^2 es el atractor global de (4.9), el cual lo tenemos garantizado por el Teorema 2.3.5.

Si realizamos una nueva iteración y reemplazamos x en (4.2) por $U^2(t)$, llegamos a

$$y' = yg(t, U^2(t), y), \quad (4.11)$$

que por la monotonía de g (ver A_1), tenemos

$$g(t, U^1(t), y) \geq g(t, U^2(t), y) \quad (4.12)$$

lo que junto con A_3) implica,

$$0 > \int_0^T g(t, U^1(t), R)dt \geq \int_0^T g(t, U^2(t), R)dt,$$

de donde aplicando nuevamente el Teorema 1.5.8. existe V^2 atractor global de (4.11), que por el Corolario 1.5.11. junto con (4.12) se tiene que,

$$V^1 \geq V^2 \geq 0.$$

Continuando con este proceso de una manera iterada, se determinan unas sucesiones de atractores las cuales de manera general están definidas por el esquema (4.6), que además claramente verifican las condiciones de monotonía establecidas en (4.7).

Así, las sucesiones $\{U^{2N-1}\}$, $\{U^{2N}\}$, $\{V^{2N-1}\}$ y $\{V^{2N}\}$ para $N \in \mathbb{N}$ son monótonas y uniformemente acotadas, por tanto convergentes punto por punto para cada $t \in \mathbb{R}$.

Definimos ahora,

$$\begin{aligned} \bar{U}(t) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} U^{2N-1}(t) ; \quad \underline{U}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} U^{2N}(t), \\ \bar{V}(t) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} V^{2N-1}(t) ; \quad \underline{V}(t) = \lim_{N \rightarrow +\infty} V^{2N}(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

También es claro, tal y como se ha desarrollado el esquema, que U^N , V^N ; $N \in \mathbb{N}$ verifican,

$$\begin{aligned} (U_i^N)' &= U_i^N f_i(t, U^N, V^{N-1}(t)) \\ (V^N)' &= V^N g(t, U^N(t), V^N), \end{aligned} \quad (4.14)$$

por lo que las sucesiones $\{(U^N)'(t)\}$ y $\{(V^N)'\}$ están uniformemente acotadas.

Aplicando el Teorema de Ascoli existen sucesiones parciales uniformemente convergentes, y por (4.7) concluimos que la convergencia expresada en (4.13) es uniforme en $t \in \mathbb{R}$.

Por tanto de (4.14) y el Teorema de Intercambio de Límites con Derivadas podemos afirmar que se satisfacen las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned}\bar{U}'_i &= \bar{U}_i f_i(t, \bar{U}, \bar{V}(t)) \quad ; \quad \underline{U}'_i = \underline{U}_i f_i(t, \underline{U}, \bar{V}(t)), \\ \bar{V}' &= \bar{V} g(t, \bar{U}(t), \bar{V}) \quad ; \quad \underline{V}' = \underline{V} g(t, \underline{U}(t), \underline{V}).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Por otra parte, la misma idea desarrollada en (4.6) la podemos utilizar para una solución positiva del sistema (4.1) (4.2), y de esta manera intentamos establecer una relación entre los dos esquemas que se producen, determinando así un resultado en el que probaremos que toda solución del sistema se encuentra atraída por el "rectángulo" $[\underline{U}, \bar{U}] \times [\underline{V}, \bar{V}]$.

Concretamente sea $(u(t), v(t))$ la solución positiva del sistema (4.1) (4.2) que verifica la condición inicial $u(0) = x_0 > 0, v(0) = y_0 > 0$. Definimos $v^0 \equiv 0$ y la reemplazamos por y en (4.1) llegando así al siguiente sistema,

$$x'_i = x_i f_i(t, x, 0) \quad x(0) = x_0,\tag{4.16}$$

por el Teorema 2.3.5. tenemos que (4.16) posee una solución $u^1(t)$ definida y acotada en $[0, +\infty)$. Además por la monotonía de la función f_i (ver A_1) se verifica

$$f_i(t, u^1(t), v(t)) \leq f_i(t, u^1(t), 0),$$

es decir, $u^1(t)$ es una supersolución del sistema,

$$x'_i = x_i f_i(t, x, v(t)),$$

y por el Teorema 1.3.7., se tiene

$$u(t) \leq u^1(t) \quad \forall t \geq 0. \quad (4.17)$$

Tomamos $u^1(t)$ y la sustituimos por x en (4.2), quedándonos la siguiente ecuación,

$$y' = yg(t, u^1(t), y) \quad y(0) = y_0, \quad (4.18)$$

como u^1 está acotada, tenemos que existe $M > 0$ tal que

$$u_i^1(t) \leq M \quad \forall t \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

luego si definimos $\vec{M} := (M, \dots, M) \in \mathbb{R}_+^n$, por la monotonía de la función g se verifica,

$$g(t, u^1(t), y) \leq g(t, \vec{M}, y) \leq g(t, \vec{M}, 0) \leq K,$$

de donde la solución v^1 de (4.18) satisface $(v^1)' \leq K v^1$, es decir, $v^1 \leq e^{Kt} y_0$ de modo que $v^1(t)$ está definida en $[0, +\infty)$.

Por otra parte de (4.7) y la monotonía de la función g , se tiene

$$g(t, u(t), y) \leq g(t, u^1(t), y)$$

así, $v^1(t)$ es una supersolución de la ecuación

$$y' = yg(t, u(t), y)$$

de donde nuevamente por el Teorema 1.3.7. tenemos que $v(t) \leq v^1(t)$ para todo $t \geq 0$.

Si el proceso lo continuamos, llegamos a unas sucesiones de soluciones que de forma general podemos expresar en el siguiente esquema iterativo,

$$\begin{aligned}(x^N)' &= x_i^N f_i(t, x^N, y^{N-1}); \quad x^N(0) = x_0; \quad y^0 \equiv 0 \quad \text{con } N \in \mathbb{N} \\ (y^N)' &= yg(t, x^N, y^N); \quad y^N(0) = y_0 \quad \text{con } N \in \mathbb{N}.\end{aligned}\tag{4.19}$$

Además es fácil comprobar que se satisfacen las siguientes condiciones de monotonía,

$$0 \leq u^2 \leq u^4 \leq \dots \leq u^{2N} \leq u \leq u^{2N-1} \leq \dots \leq u^3 \leq u^1 \tag{4.20}$$

$$0 \equiv v^0 \leq v^2 \leq \dots \leq v^{2N} \leq v \leq v^{2N-1} \leq \dots \leq v^3 \leq v^1 \tag{4.21}$$

Nuevamente tendríamos cuatro sucesiones $\{u^{2N-1}\}$, $\{u^{2N}\}$, $\{v^{2N-1}\}$ y $\{v^{2N}\}$, que por los mismos argumentos empleados en el esquema iterativo de los atractores, convergen puntualmente para cada $t \in \mathbb{R}$. Tomando un compacto arbitrario de \mathbb{R} , tenemos que esta convergencia sería uniforme sobre dicho compacto, de esta manera si notamos como \bar{u} , \underline{u} , \bar{v} y \underline{v} a los límites respectivos, podemos concluir utilizando el Teorema de Intercambio de Límites con Derivadas que se verifica,

$$\bar{u}'_i = \bar{u}_i f_i(t, \bar{u}, \underline{v}) \quad ; \quad \underline{u}'_i = \underline{u}_i f_i(t, \underline{u}, \bar{v}) \tag{4.22}$$

$$\bar{v}' = \bar{v} g(t, \bar{u}, \bar{v}) \quad ; \quad \underline{v}' = \underline{v} g(t, \underline{u}, \underline{v}) \tag{4.23}$$

Proposición 4.2.1. Sean $v : (\alpha, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ función continua, $V : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ función continua y T -periódica, verificando

$$v(t) \Leftrightarrow V(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty. \tag{4.24}$$

Sea u una solución positiva de $x'_i = x_i f_i(t, x, v(t))$ definida y acotada en $[0, +\infty)$. Si U es el atractor global de (4.3). Entonces

$$u(t) \Leftrightarrow U(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Demostración. Dado $\delta > 0$ tenemos que por (4.24), existe $t_0 \in \mathbb{R}$ de manera que,

$$\max\{0, V(t) \Leftrightarrow \delta\} \leq v(t) \leq V(t) + \delta, \quad t \geq t_0.$$

Además, por la monotonía de f_i se verifica,

$$f_i^{\max\{0, V-\delta\}} \leq f_i^V \leq f_i^{V+\delta}$$

Por otra parte si llamamos u_* a la solución de

$$x'_i = x_i f_i^{\max\{0, V-\delta\}}(t, x), \quad 1 \leq i \leq n, \quad x(t_0) = x_0 > 0. \quad (4.25)$$

y u^* a la solución de

$$x'_i = x_i f_i^{V+\delta}(t, x), \quad 1 \leq i \leq n, \quad x(t_0) = x_0 > 0. \quad (4.26)$$

tenemos que por el Teorema 1.3.4. y el Teorema 2.3.5. dichas soluciones están definidas en $[t_0, +\infty)$ y además,

$$u_*(t) \leq u(t) \leq u^*(t) \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.27)$$

También del Teorema 2.3.5. tenemos que (4.25) (4.26) poseen atractores globales $\theta(\max\{0, V \Leftrightarrow \delta\})$, $\theta(V + \delta)$ que por la Proposición 3.1 verifican,

$$\theta(\max\{0, V \Leftrightarrow \delta\}) \leq U \leq \theta(V + \delta),$$

lo que junto con (4.27) implica,

$$u_i(t) \Leftrightarrow U_i(t) \leq u_i^*(t) \Leftrightarrow U_i(t) = u_i^*(t) \Leftrightarrow \theta(V + \delta)_i(t) + \theta(V + \delta)_i(t) \Leftrightarrow U_i(t).$$

Por el Teorema 3.2.6., se tiene que $\theta(V + \delta) \rightarrow U$ cuando $\delta \rightarrow 0$, de modo que para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\theta(V + \delta)_i(t) \Leftrightarrow U_i(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.28)$$

como $\theta(V + \delta)$ es atractor global de (4.26), existe t_1 tal que

$$u_i^*(t) \Leftrightarrow \theta(V + \delta)_i(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall t \geq t_1, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.29)$$

por tanto de (4.28) y (4.29) concluimos que $u_i(t) \Leftrightarrow U_i(t) \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_1$. Análogamente existe $t_2 \in \mathbb{R}$ tal que $u_i(t) \Leftrightarrow U_i(t) \geq \epsilon \quad \forall t \geq t_2$. con lo que fácilmente se completa la prueba. ■

Proposición 4.2.2. *Dado $N \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$u^N(t) \Leftrightarrow U^N(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty$$

$$v^N(t) \Leftrightarrow V^N(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty$$

para u^N, v^N, U^N, V^N definidas en los esquemas iterativos (4.19) y (4.6).

Demostración. Vamos a razonar por inducción sobre N , para lo cual sabemos que u^1 es solución del sistema $x'_i = x_i f_i(t, x, 0) \quad 1 \leq i \leq n$, y como U^1 es el atractor global del mismo sistema, se tiene

$$u^1(t) \Leftrightarrow U^1(t) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty \quad (4.30)$$

Por otra parte sabemos que v^1 es solución de la ecuación $y' = yg(t, u^1(t), y)$ y V^1 es el atractor global de $y' = yg(t, U^1(t), y)$. Por tanto de (4.30) y el Teorema 1.5.9. sobre la dependencia continua del atractor respecto de la función que lo determina, se concluye fácilmente que

$$v^1(t) \Leftrightarrow V^1(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty$$

lo cual prueba el caso $N = 1$. Supongamoslo cierto para $N \Leftrightarrow 1$, es decir

$$\begin{aligned} u^{N-1}(t) \Leftrightarrow U^{N-1}(t) &\rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty \\ v^{N-1}(t) \Leftrightarrow V^{N-1}(t) &\rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (4.31)$$

Tomamos ahora u^N que sabemos que es solución de $x'_i = x_i f_i(t, x, v^{N-1}(t))$, $1 \leq i \leq n$. Como U^N es el atractor global de $x'_i = x_i f_i(t, x, V^{N-1}(t))$ para $1 \leq i \leq n$, tenemos de (4.31) y la Proposición 4.2.1. que

$$u^N(t) \Leftrightarrow U^N(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

De donde la prueba se sigue fácilmente, empleando un razonamiento análogo al realizado con v^1 , V^1 , para v^N , V^N . ■

Con todo esto estamos en condiciones de poder demostrar el resultado que nos habíamos planteado en este capítulo.

Teorema 4.2.3. *Sea $(u(t), v(t))$ una solución positiva del sistema (4.1), (4.2). Entonces (u, v) está definida en un intervalo terminal de \mathbb{R} y además para todo $\epsilon > 0$ existe $t_0 \geq 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \underline{U}_i(t) \Leftrightarrow \epsilon &\leq u_i(t) \leq \bar{U}_i(t) + \epsilon \quad 1 \leq i \leq n; \quad t \geq t_0 \\ \underline{V}(t) \Leftrightarrow \epsilon &\leq v(t) \leq \bar{V}(t) + \epsilon \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Demostración. Hacemos notar en primer lugar que claramente según hemos visto en el desarrollo explícito de los primeros pasos del esquema iterativo (4.19), se deduce que la solución (u, v) está definida en un intervalo terminal de \mathbb{R} .

Fijamos $\epsilon > 0$ y un $i = 1, \dots, n$. Por (4.20) tenemos que

$$u_i(t) \Leftrightarrow \bar{U}_i(t) \leq u_i^{2N-1}(t) \Leftrightarrow \bar{U}_i(t),$$

lo que por conveniencia escribimos en la forma,

$$u_i(t) \Leftrightarrow \bar{U}_i(t) \leq u_i^{2N-1}(t) \Leftrightarrow U^{2N-1}(t) + U^{2N-1}(t) \Leftrightarrow \bar{U}_i(t). \quad (4.33)$$

Como la convergencia de (4.13) es uniforme, existe N_1 tal que,

$$U_i^{2N_1-1}(t) \Leftrightarrow \bar{U}_i(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (4.34)$$

Por otra parte del la Proposición 4.2.2., existe t_0 verificando

$$u_i^{2N_1-1}(t) \Leftrightarrow U_i^{2N_1-1}(t) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall t \geq t_0. \quad (4.35)$$

Por tanto concluimos que de (4.33),(4.34) y (4.35),

$$u_i(t) \Leftrightarrow \bar{U}_i(t) \leq \epsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

Utilizando el mismo argumento se llega a la existencia de t_1 ,

$$u_i(t) \Leftrightarrow \underline{U}_i(t) \geq \epsilon \quad \forall t \geq t_1.$$

De manera fácil se siguen las desigualdades para v , lo que completa la prueba. ■

Veamos como a partir del Teorema anterior podemos obtener bajo determinadas condiciones un resultado de extinción para $y(t)$.

Corolario 4.2.4. *Sea U el atractor global de (4.4) y supongamos que*

$$\int_0^T g(t, U(t), 0) dt \leq 0. \quad (4.36)$$

Entonces, $(u(t) \Leftrightarrow U(t), v(t)) \rightarrow (0, 0)$ cuando $t \rightarrow +\infty$, para toda solución positiva (u, v) del sistema (4.1), (4.2).

Demostración. De (4.36), tenemos que $V^1 \equiv 0$ de donde por (4.7), deducimos que $V^N \equiv 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Por tanto de (4.6) $U^N \equiv U \quad \forall N \in \mathbb{N}$, y así ,

$$\bar{V} = \underline{V} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{U} = \underline{U} = U.$$

Con lo que la prueba se completa fácilmente del Teorema 4.2.3. ■

Resultado Colateral

Otro tipo especialmente importante de los sistemas kolmogorov es el caso de aquellos en los que se tiene una competición entre las especies, por esto hemos querido realizar una sección para este tipo de sistemas donde utilizando la misma técnica iterativa, podemos llegar a una persistencia en promedio, resultado que es totalmente colateral al obtenido por medio de otro procedimiento en el trabajo " *Persistence in the Means of Some Competing Systems* " [25]. Para ello establecemos previamente la siguiente notación.

Dada una función acotada $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definimos

$$g^* := \limsup_{t \rightarrow +\infty} g(t) ; g_* := \liminf_{t \rightarrow +\infty} g(t).$$

Para $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ función continua y acotada, definimos su promedio como,

$$\langle f \rangle (t) := \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds,$$

cuando este promedio posea límite, lo notaremos

$$\overline{\langle f \rangle} := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds.$$

Enunciamos ahora algunos resultados sobre la ecuación logística cuya demostración omitimos, pero que podemos encontrar en el citado trabajo [25].

Supongamos la siguiente ecuación de logística,

$$x' = x[a(t) \Leftrightarrow bx], \quad (\text{C.1})$$

donde $a : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y acotada con b una constante positiva.

Proposición 1. *Dada u una solución de (C.1). Se tiene que si $\langle a \rangle_* > 0$, entonces $\langle u \rangle^* = \langle a \rangle_* b^{-1}$.*

Igualmente y aplicando el lema 1.1 de [25], se obtiene fácilmente para el límite inferior del promedio que,

$$\langle u \rangle_* \geq \langle a \rangle_* b^{-1}. \quad (\text{C.2})$$

Por tanto, si suponemos que existe $\overline{\langle a \rangle}$ y es positivo, tenemos que por la Proposición 1. , $\langle u \rangle^* = \overline{\langle a \rangle} b^{-1}$, lo que junto con (C.2) implica,

$$\overline{\langle a \rangle} b^{-1} \leq \langle u \rangle_* \leq \langle u \rangle^* = \overline{\langle a \rangle} b^{-1},$$

es decir $\overline{\langle u \rangle} = \overline{\langle a \rangle} b^{-1}$, lo cual lo podemos enunciar mediante el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea u una solución de (C.1) . Si existe $\overline{\langle a \rangle} > 0$, entonces $\overline{\langle u \rangle} = \overline{\langle a \rangle} b^{-1}$.*

Veamos ahora como utilizando los mismos argumentos del Capítulo 4, podemos desarrollar un esquema iterativo para el siguiente sistema de n -especies en competencia,

$$x' = x_i \left(a_i(t) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \right) \quad 1 \leq i \leq n, \quad (\text{C.3})$$

con $a_i(t) : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y $b_{ij} > 0$. Determinando un resultado análogo al obtenido en el teorema 2.2 de [25].

De forma más explícita el esquema iterativo lo expresamos de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} u_i^0 &\equiv 0 \\ (u_i^{N+1})' &= u_i^{N+1} \left[a_i(t) \Leftrightarrow b_{ii} u_i^{N+1} \Leftrightarrow \sum_{j \in J_i} b_{ij} u_j^N(t) \right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

con $1 \leq i \leq n$.

Es fácil comprobar que si u es la solución de (C.3) con la condición inicial $u(0) = x^0 > 0$ y tomamos las soluciones de (C.4) verificando $u_i^N(0) = x_i^0$ para $1 \leq i \leq n$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple la siguiente condición de monotonía,

$$u_i^2 \leq u_i^4 \leq \dots \leq u_i^{2N} \leq u_i \leq u_i^{2N-1} \leq \dots \leq u_i^3 \leq u_i^1 \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por otra parte si suponemos para $N = 0$ en (C.4) que $\overline{\langle a_i \rangle} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, tenemos que por el Teorema 2.,

$$\langle u_i^1 \rangle (t) \rightarrow \overline{\langle a_i \rangle} b_{ii}^{-1} \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Análogamente para $N = 1$ tenemos que si se verifica,

$$\overline{\langle a_i \rangle} > \sum_{j \in J_i} b_{ij} \overline{\langle u_j^1 \rangle} \quad 1 \leq i \leq n, \quad (\text{C.5})$$

entonces nuevamente por el Teorema 2. se cumple,

$$\langle u_i^2 \rangle (t) \rightarrow \overline{\langle a_i(t) \Leftrightarrow \sum_{j \in J_i} b_{ij} u_j^1(t) \rangle} b_{ii}^{-1} \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty \quad 1 \leq i \leq n,$$

de donde por la linealidad del promedio llegamos a,

$$\overline{\langle u_i^2 \rangle} = \left(\overline{\langle a_i \rangle} \Leftrightarrow \sum_{j \in J_i} b_{ij} \overline{\langle u_j^1 \rangle} \right) b_{ii}^{-1} \quad 1 \leq i \leq n, \quad (\text{C.6})$$

y además $\overline{\langle u_i^2 \rangle} > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. De esta manera se prueba fácilmente que,

$$0 < \overline{\langle u_i^2 \rangle} \leq \overline{\langle u_i^4 \rangle} \leq \dots \leq \overline{\langle u_i^{2N} \rangle} \leq \overline{\langle u_i^{2N-1} \rangle}$$

$$\overline{\langle u_i^{2N-1} \rangle} \leq \dots \leq \overline{\langle u_i^3 \rangle} \leq \overline{\langle u_i^1 \rangle} \quad 1 \leq i \leq n,$$

verificando la siguiente ecuación,

$$b_{ii} \overline{\langle u_i^{N+1} \rangle} = \overline{\langle a_i \rangle} \Leftrightarrow \sum_{j \in J_i} b_{ij} \overline{\langle u_j^N \rangle} \quad 1 \leq i \leq n, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (\text{C.7})$$

Por tanto tenemos dos sucesiones $\overline{\langle u^{2N-1} \rangle}_{N \in \mathbb{N}}$, $\overline{\langle u^{2N} \rangle}_{N \in \mathbb{N}}$ que son claramente monótonas y acotadas, es decir,

$$\overline{\langle u_i^{2N-1} \rangle} \rightarrow \overline{\lambda}_i \quad \text{cuando } 1 \leq i \leq n$$

$$\overline{\langle u_i^{2N} \rangle} \rightarrow \underline{\lambda}_i \quad \text{cuando } 1 \leq i \leq n$$

Luego tomando límites cuando $N \rightarrow +\infty$, para N par y para N impar respectivamente en (C.7) tenemos,

$$\overline{\langle a_i \rangle} = b_{ii} \overline{\lambda}_i + \sum_{j \in J_i} b_{ij} \underline{\lambda}_j$$

$$\overline{\langle a_i \rangle} = b_{ii} \underline{\lambda}_i + \sum_{j \in J_i} b_{ij} \overline{\lambda}_j$$

restando ambas expresiones,

$$b_{ii}(\overline{\lambda}_i \Leftrightarrow \underline{\lambda}_i) = \sum_{j \in J_i} b_{ij}(\overline{\lambda}_j \Leftrightarrow \underline{\lambda}_j). \quad (\text{C.8})$$

Llamamos $w_i := b_{ii}(\overline{\lambda}_i \Leftrightarrow \underline{\lambda}_i)$ y fijamos $k = 1, \dots, n$ tal que,

$$\frac{w_k}{\alpha_k} \geq \max_j \left\{ \frac{w_j}{\alpha_j} \quad j = 1, \dots, n \right\}, \quad (\text{C.9})$$

con $\alpha_j = \overline{\langle a_j \rangle}$ para $j = 1, \dots, n$.

De (C.8) se tiene que $w_i = \sum_{j \in J_i} \frac{b_{ij}}{b_{jj}} w_j$, para todo $i = 1, \dots, n$, y por (C.9) llegamos a,

$$w_k = \sum_{j \in J_k} \frac{b_{kj}}{b_{jj}} w_j \leq \sum_{j \in J_k} \frac{b_{kj}}{b_{jj}} \alpha_j \frac{w_k}{\alpha_k},$$

de donde,

$$\left[\alpha_k \Leftrightarrow \sum_{j \in J_k} \frac{b_{kj}}{b_{jj}} \alpha_j \right] w_k \leq 0,$$

lo que junto con (C.5) implica que $w_k = 0$ y por (C.9) concluimos que $w_i = 0 \quad 1 \leq i \leq n$, es decir

$$\lambda_i := \underline{\lambda}_i = \overline{\lambda}_i > 0 \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por otra parte sabemos que $u_i^{2N} \leq u_i \leq u_i^{2N-1} \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i \leq n$, en particular tomando promedios se deduce,

$$\langle u_i^{2N} \rangle \leq \langle u_i \rangle \leq \langle u_i^{2N-1} \rangle \quad 1 \leq i \leq n.$$

Si fijamos $\epsilon > 0$, como $\overline{\langle u_i^{2N-1} \rangle} \rightarrow \lambda_i$, existe N_ϵ de manera que

$$\overline{\langle u_i^{2N_\epsilon-1} \rangle} \Leftrightarrow \lambda_i < \epsilon \quad 1 \leq i \leq n. \quad (\text{C.10})$$

Igualmente para dicho N_ϵ como,

$$\langle u_i^{2N_\epsilon-1} \rangle (t) \rightarrow \overline{\langle u_i^{2N_\epsilon-1} \rangle} \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty$$

tenemos que existe t_0 tal que,

$$\langle u_i^{2N_\epsilon-1} \rangle (t) \Leftrightarrow \overline{\langle u_i^{2N_\epsilon-1} \rangle} < \epsilon \quad \forall t \geq t_0. \quad (\text{C.11})$$

Por tanto de (C.10) y (C.11) deducimos que,

$$\langle u_i \rangle (t) \leq \langle u_i^{2N_\epsilon-1} \rangle (t) < \lambda_i + 2\epsilon \quad 1 \leq i \leq n,$$

de donde $\langle u_i \rangle_* \leq \lambda_i$. Análogamente se obtiene que $\langle u_i \rangle_* \geq \lambda_i$ y de esta manera llegamos al mismo resultado obtenido en el teorema 2.2 de [25], el cual podemos enunciar.

Teorema 3. *Dado el sistema (C.3) con, $\overline{\langle a_i \rangle} > 0 \quad 1 \leq i \leq n$, verificando*

$$\overline{\langle a_i \rangle} > \sum_{j \in J_i} b_{ij} \frac{\overline{\langle a_j \rangle}}{b_{jj}} \quad 1 \leq i \leq n.$$

Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ tal que $\overline{\langle u \rangle} = \lambda$ para u solución positiva de (C.3).

Capítulo 5

Aplicaciones

5.1 Introducción

La búsqueda de soluciones a la importante incidencia económica de las plagas en los cultivos ha sufrido, como es natural, una evolución a lo largo del tiempo, que ha sido muy rápida en las últimas décadas, como consecuencia de los problemas derivados del uso casi exclusivo de los plaguicidas orgánicos de síntesis (p.e.: mayor incidencia de plagas, aparición de nuevas especies plagas, resistencias a plaguicidas, incrementos de costes, problemática toxicológica y ambiental) (Baungärter y Gutiérrez, 1989; Norton y Munford, 1993; Cabello, 1998).

La utilización de métodos racionales de control de plagas de los cultivos, debido a la complejidad de los procesos biológicos y de los objetivos económicos implicados, ha dado lugar a la aplicación de técnicas de análisis de sistemas. El importante papel de estas técnicas en la agricultura en general, pero especialmente en el control de plagas y enfermedades, concretamente en

su aproximación analítica, ha sido recientemente revisada por Carreño (1996).

Dentro del agroecosistema, si consideramos el sistema formado por la plaga-cultivo, debemos considerar como en cualquier ecosistema, aunque en el presente caso se trate de un ecosistema no natural, el conjunto de seres vivos y su ambiente. El conjunto de seres vivos está constituido por la población de plantas, en este caso el cultivo; la población de fitófagos, que alimentándose en las plantas originan un daño; y finalmente la población de enemigos naturales, que causan mortalidad, a su vez, sobre la población de las especies plagas. Los enemigos naturales constituyen un factor fundamental en la regulación de las poblaciones de las especies plagas, y por tanto en su posterior incidencia económica en el cultivo (Hill, 1987; Dent, 1991).

Los enemigos naturales de las especies plagas están constituidos por un conjunto de seres que viven de forma parasitaria sobre ellas. Los enemigos naturales se dividen en dos grandes grupos: El primer grupo está constituido por agentes patogénicos, es decir que la relación de parasitismo se expresa en el desarrollo de una enfermedad en el individuo plaga; en este grupo de encuentran: virus, bacterias, hongos, protozoos y nematodos (Beckage et al., 1993). El segundo grupo está constituido por artrópodos (insectos y ácaros) que capturan y devoran individuos de la plaga (depredadores), o bien establecen una especial relación de parasitismo (parasitoides). Esta denominación de parasitoide corresponde únicamente a insectos cuyos estados inmaduros viven dentro, o sobre, las especies plagas, alimentándose de ellas (Jervis y Kidd, 1997).

La importancia del papel de los enemigos naturales de las especies plagas,

dentro del cultivo, es fundamental. Ellos, conjuntamente con otros factores bióticos y abióticos, originan una mortalidad que va a regular las poblaciones de las plagas, es lo que se denomina "control natural". En el caso concreto del agrosistema, de todos los factores de control natural, es la acción de los enemigos naturales (depredadores, parasitoides y patógenos) el de mayor incidencia sobre las poblaciones de las plagas; y responsables, por tanto, del mayor o menor grado de severidad del daño originado por plagas (Huffaker, 1980; Huffaker y Rabb, 1984).

El control ejercido por los enemigos naturales de las especies plagas obviamente es insuficiente para regular sus poblaciones, y especialmente mantenerlas por debajo de un umbral en el que causa daños de importancia económica en los cultivos. Cuando de forma deliberada se manipula la acción de los enemigos naturales, por la conservación o incremento de su número, así como la introducción de especies nuevas, tenemos la definición de lucha biológica contra plagas, técnica alternativa al control químico de plagas (DeBach, 1977, 1984; Samways, 1990).

En el estudio de la dinámica de población de las especies plagas, dentro del cultivo, es fundamental considerar los sistemas depredador-presa, parasitoide-hospedante y patógeno-hospedante; según sea el tipo de enemigo natural en el que estemos interesado (depredador, parasitoide o patógeno). En relación a la descripción del sistema depredador-presa (parasitoide-hospedante), numerosos han sido los trabajos que han abordado el tema desde un punto de vista matemático; especialmente destacan los trabajos iniciales de Lotka (1925), Volterra (1926), Nicholson (1933), y Nicholson y Bailey (1935); los posteriores

de Solomon (1949), Watt (1959), Holling (1959, 1963, 1966), Hassell (1966); Royama (1971); Huffaker y Stinner (1971); y Curry y DeMichele (1977). En la actualidad se han revisado los trabajos realizados sobre la relación depredador-presa, cuando se aplican, como el presente caso, a insectos plagas (Mills y Getz, 1996).

Las aplicaciones prácticas de la relación depredador-presa para el estudio de la importancia del papel del control natural en la dinámica de población de las especies plaga, se señalaron muy posteriormente a su desarrollo matemático (Hassell y Waage, 1984; Hassell, 1988; May y Hassell, 1988; Mackauer et al., 1990); por lo tanto, pocos han sido los trabajos que han abordado este aspecto de aplicación. En el caso de evaluación del control natural debemos señalar los trabajos sobre tres grupos de especies plagas: áfidos (Gutierrez et al., 1984), ácaros (Sabelis, 1985) y tisanópteros (Lewis, 1997).

5.2 Casos Concretos

En esta sección pretendemos plantear y estudiar desde el punto de vista matemático, las condiciones para que se verifiquen los resultados obtenidos en los anteriores esquemas iterativos en el caso Lotka-Volterra autónomo, comprobándolos mediante dos supuestos ejemplos.

Concretamente consideramos el siguiente sistema diferencial,

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \left[a_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \Leftrightarrow d_i y \right] \\ y' &= y \left[\Leftrightarrow \alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \Leftrightarrow \gamma y \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde $\alpha, \beta_i, d_i, \gamma > 0$ $1 \leq i \leq n$. Además para que (5.1) verifique las hipótesis necesarias para poder aplicar los resultados obtenidos (fundamentalmente en el capítulo 3) sobre el atractor global del sistema, suponemos que,

$$b_{ii} > 0 > b_{ij} \quad \forall i \neq j. \quad (5.2)$$

Igualmente suponemos también que existen c_1, \dots, c_n constantes positivas tales que,

$$\sum_{j=1}^n c_j b_{ji} > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (5.3)$$

En primer lugar hacemos constar que en modelo (5.1), el operador $B = (b_{ij})$ posee la siguiente propiedad, la cual expresamos a través del siguiente Lema.

Lema 5.2.1. *La matriz B es invertible y además B^{-1} es positiva, es decir $B^{-1}(a) > 0$ para $a \geq 0$ y $a \neq 0$, donde $a = \text{col}(a_1, \dots, a_n)$.*

Demostración. Fijamos $a \in \mathbb{R}_+^n$, $a \neq 0$ y sea $U = (U_1, \dots, U_n) \in \mathbb{R}_+^n$ el atractor global del sistema

$$x'_i = x_i \left[a_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \right]; \quad 1 \leq i \leq n. \quad (5.4)$$

Recordamos que por (5.2) y (5.3) dicho atractor lo tenemos garantizado por el Teorema 2.3.5., el cual sabemos además que es constante según el Teorema 2.2.10.

Afirmación, $U > 0$. Para demostrarla razonamos por reducción al absurdo, y así suponemos que $U_i = 0$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Por la Proposición 3.3.1. tenemos, $\int_0^T \left(a_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n b_{ij} U_j \right) dt \leq 0$, lo que junto con $a_i \in \mathbb{R}_+^n$ y

(5.2) implica,

$$0 \leq a_i \leq \sum_{j=1}^n b_{ij}U_j = \sum_{j \in J_i} b_{ij}U_j \leq 0.$$

con lo que $U_j = 0 \quad \forall j \in J_i$, es decir, $U = 0$.

Dado que $a \in \mathbb{R}_+^n$ con $a \neq 0$, fijamos $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_k > 0$.

Por otra parte como $U = 0$, en particular $U_k = 0$ y por la Proposición 3.3.1. se deduce que $a_k \leq 0$ lo cual es absurdo. Esta contradicción prueba nuestra afirmación.

Por (5.4) y la afirmación anterior, tenemos

$$a_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}U_j \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

de donde $B(U) = a$. En particular la imagen de B contiene a \mathbb{R}_+^n , de aquí B es invertible, y además $B^{-1}(a) = U > 0$. ■

Ejemplo 1

Veamos mediante el siguiente caso concreto cómo se desarrollaría para (5.1) el esquema iterativo del capítulo anterior. Así supongamos que el operador B viene determinado por los siguientes coeficientes,

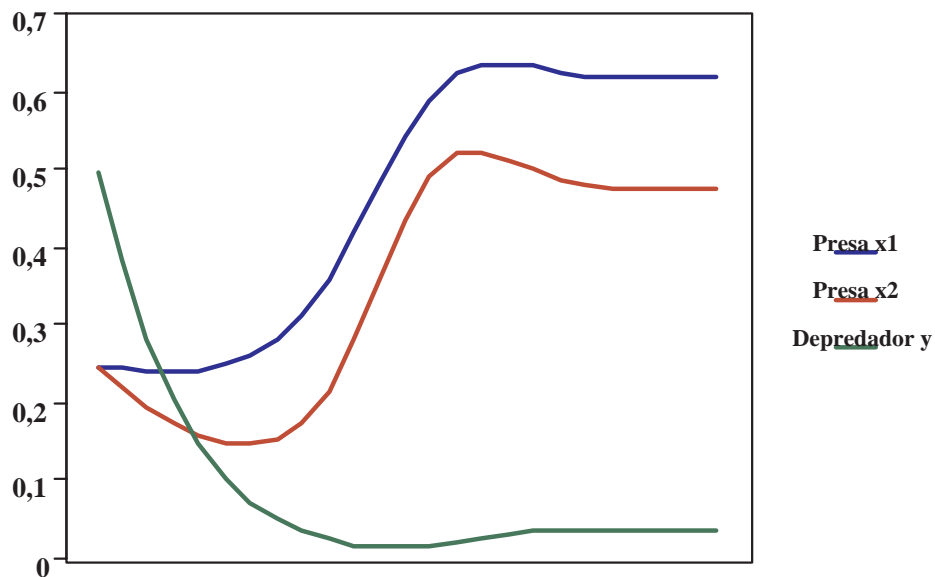
$$B \equiv \begin{pmatrix} 1.4 & \Leftrightarrow 0.5 \\ \Leftrightarrow 0.5 & 1.7 \end{pmatrix}$$

y que, $\alpha = 1$, $\gamma = 14$, $\vec{\beta} = (1.2, 1.6)$, $\vec{d} = (2, 8)$ y $\vec{a} = (0.7, 0.8)$. Entonces con la ayuda del paquete informático *Mathemática* se realiza el programa dado en el Anexo I, incluido al final del presente capítulo, se obtiene que después de 50 iteraciones la cadena de atractores globales para dicho caso concreto es la expresada en las siguientes tablas,

Iteración k	IMPARES				
	1	3	...	47	49
x_1^k	0.746	0.745	...	0.6181	0.6180
x_2^k	0.690	0.687	...	0.479	0.478
y^k	0.0763	0.0758	...	0.0397	0.0396

Iteración k	PARES				
	2	4	...	48	50
x_1^k	0.481	0.482	...	0.6088	0.6088
x_2^k	0.253	0.256	...	0.463	0.463
y^k	0.0005	0.001	...	0.0369	0.0369

La expresión gráfica de la resolución numérica del proceso realizada mediante el paquete informático "Pupulus" muestra el siguiente resultado:



De manera, comprobamos la concordancia entre ambos resultados y de forma general, se puede comprobar que para aplicar el esquema iterativo al modelo (5.1), las condiciones suficientes son las que expresamos mediante el siguiente teorema.

Teorema 5.2.2. *Supongamos que,*

$$i) \langle B^{-1}(a), \beta \rangle \Leftrightarrow \alpha > 0.$$

$$ii) B^{-1}(a) > \frac{\langle B^{-1}(a), \beta \rangle \Leftrightarrow \alpha}{\gamma} B^{-1}(d).$$

$$iii) \gamma > \langle B^{-1}(d), \beta \rangle .$$

donde $a = \text{col}(a_1, \dots, a_n)$, $d = \text{col}(d_1, \dots, d_n)$, $\beta = \text{col}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno usual en \mathbb{R}^n . Entonces (5.1) posee un punto de equilibrio positivo (U, V) tal que

$$(x(t), y(t)) \rightarrow (U, V) \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty,$$

para cualquier solución positiva (x, y) del sistema.

Demostración. Por el Lema 5.2.1. $B^{-1}(d) > 0$, lo que junto con las hipótesis $i) \Leftrightarrow ii)$ se prueba fácilmente que $B^{-1}(a) > 0$, por tanto se tiene que $B^{-1}(a)$ es solución del sistema,

$$x'_i = x_i \left(a_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \right) \quad 1 \leq i \leq n,$$

y según vimos en la prueba de la Proposición 2.2.5. las soluciones T-periódicas son únicas, por tanto tenemos en particular que $U^1 = B^{-1}(a)$.

Si continuamos con el esquema iterativo, tenemos que V^1 es el atractor global de

$$y' = y[\Leftrightarrow\alpha + \langle \beta, B^{-1}(a) \rangle \Leftrightarrow\gamma y],$$

de donde por *i*),

$$V^1 = \frac{1}{\gamma}[\langle \beta, B^{-1}(a) \rangle \Leftrightarrow\alpha] > 0. \quad (5.5)$$

Por *ii*) se tiene que $B^{-1}(a \Leftrightarrow V^1 d) > 0$, y dado que $U^2 = \theta(V^1)$ implica

$$U^2 = B^{-1}(a \Leftrightarrow V^1 d) = B^{-1}a \Leftrightarrow V^1 B^{-1}(d).$$

Por otra parte es fácil ver que ,

$$\langle U^2, \beta \rangle \Leftrightarrow\alpha = [\langle B^{-1}(a), \beta \rangle \Leftrightarrow\alpha] \left[1 \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} \langle B^{-1}(d), \beta \rangle \right],$$

lo que junto con *iii*) determina que $\langle U^2, \beta \rangle \Leftrightarrow\alpha > 0$. Consecuentemente $V^2 = , (U^2) > 0$ y por (4.7), se tiene que $\underline{U}, \bar{U}, \underline{V},$ y \bar{V} son positivos.

Como U^N, V^N son constantes, también lo serán $\underline{U}, \bar{U}, \underline{V},$ y \bar{V} , de lo que junto con (4.15) se deduce que

$$\begin{aligned} a &= B(\bar{U}) + \underline{V}d \quad ; \quad \langle \beta, \underline{U} \rangle = \alpha + \gamma \underline{V} \\ a &= B(\underline{U}) + \bar{V}d \quad ; \quad \langle \beta, \bar{U} \rangle = \alpha + \gamma \bar{V} \end{aligned}$$

Restando convenientemente las ecuaciones anteriores se llega a,

$$B(\bar{U} \Leftrightarrow \underline{U}) = (\bar{V} \Leftrightarrow \underline{V})d \quad ; \quad \langle \beta, \bar{U} \Leftrightarrow \underline{U} \rangle = \gamma(\bar{V} \Leftrightarrow \underline{V}), \quad (5.6)$$

en particular $\langle \beta, B^{-1}(d) \rangle (\bar{V} \Leftrightarrow \underline{V}) = \gamma(\bar{V} \Leftrightarrow \underline{V})$ y así,

$$[\gamma \Leftrightarrow \langle \beta, B^{-1}(d) \rangle](\bar{V} \Leftrightarrow \underline{V}) = 0.$$

Lo que junto con *iii*) nos lleva a $\bar{V} = \underline{V}$ y de (5.6) se tiene que $\bar{U} = \underline{U}$ con lo que la prueba se sigue fácilmente del Teorema 4.2.3. ■

Corolario 5.2.3. *Sea el sistema (5.1) con $a_i \geq 0$; $a_k \neq 0$ para algún $k \in \{1, \dots, n\}$. Si se verifica (5.2), (5.3) y $\langle \beta, B^{-1}(a) \rangle \leq \alpha$, entonces*

$$(x(t), y(t)) \rightarrow (B^{-1}(a), 0) \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty,$$

para cualquier solución positiva (x, y) de dicho sistema.

Demostración. Del Teorema 1.5.8. se tiene que $V^1 = 0$, por tanto de (4.7) se deduce que $V^N = 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$, de donde $\bar{V} = 0 = \underline{V} = 0$. Entonces se verifica que $U^N = U^1$ para todo $N \in \mathbb{N}$, con lo que por el Teorema 4.2.3. se completa fácilmente la prueba. ■

Ejemplo 2.

También podemos plantear el caso autónomo suponiendo que el depredador se reproduzca, para lo cual empleamos el modelo análogo al (5.1), cambiando la segunda ecuación con lo que queda el siguiente sistema,

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \left[a_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \Leftrightarrow d_i y \right] \\ y' &= y \left[\alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \Leftrightarrow \gamma y \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Veamos al igual que en el Ejemplo 1 un caso concreto para el modelo (5.7), utilizando los siguientes coeficientes,

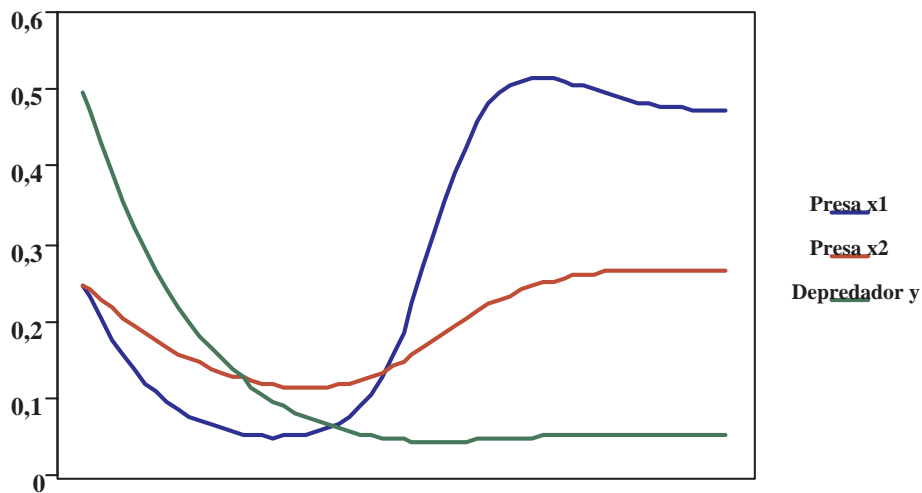
$$B \equiv \begin{pmatrix} 1.3 & \Leftrightarrow 0.2 \\ \Leftrightarrow 0.1 & 1 \end{pmatrix},$$

y que, $\alpha = 0.2$, $\gamma = 8.5$, $\vec{\beta} = (0.2, 0.7)$, $\vec{d} = (13, 5)$, y $\vec{a} = (1.3, 0.5)$. Nuevamente mediante el programa informático del Anexo I obtenemos,

	IMPARES				
Iteración k	1	3	...	49	50
x_1^k	1.094	0.832	...	0.475445	0.475444
x_2^k	0.609	0.463	...	0.264891	0.26489
y^k	0.009	0.081	...	0.0565309	0.0565308

	PARES				
Iteración k	2	4	...	48	50
x_1^k	0.006	0.205	...	0.475443	0.475444
x_2^k	0.003	0.114	...	0.26489	0.26489
y^k	0.0239	0.0378	...	0.0565307	0.0565308

Nuevamente la expresión gráfica de la resolución numérica utilizando el mismo paquete informático, quedaría de la siguiente forma.



Se observa de nuevo la concordancia entre ambos resultados y es claro que al no variar aquí las ecuaciones que modelan a las presas del modelo (5.1), tenemos igualmente las condiciones para la existencia del atractor global, así utilizando los mismos argumentos empleados en la prueba del Teorema 5.2.2., se puede ver que se simplifican las condiciones para que el proceso iterativo se pueda utilizar. Concretamente podemos llegar fácilmente al siguiente Teorema.

Teorema 5.2.4. *Supongamos que,*

$$B^{-1}(a) > \frac{\langle B^{-1}(a), \beta \rangle + \alpha}{\gamma} B^{-1}(d)$$

Entonces se obtienen para (5.7) las mismas conclusiones que en el Teorema 5.2.2., donde a , d y β análogos a los del citado teorema.

5.3 Aplicaciones de los modelos Presa-Depredador en cultivos hortícolas.

Para la aplicación de los modelos depredador-presa se han elegido ejemplos relativos a especies plagas en cultivos hortícolas, dentro de estos cultivos la incidencia de estos enemigos de las plantas, así como su solución mediante el control químico, constituye un capítulo muy importante (Cabello y Cañero, 1994); además de su importancia cuantitativa, está la cualitativa, fundamentalmente por la problemática derivada de la misma (Cabello, 1998).

En concreto se han elegido dos cultivos: pimiento y tomate; así como tres grupos de especies plaga de gran severidad económica en los mismos: "He-

liothis del tomate”, lepidóptero, Noctuido, denominado: *Helicoverpa armigera* (Hb.), ”mosca blanca”, nombre común que corresponde al Homóptero, Aleyródido: *Bemisia tabaci* (Gen.); y finalmente el Tysanóptero, Trípido: *Frankliniella occidentalis* (Pergande), que se denomina comúnmente ”trips occidental de las flores”. En este grupo de especies plagas, y condiciones de cultivo, se disponen de estudios sobre su biología, ecología y control (Belda et al., 1992; Cabello y Belda, 1994; Cabello y Benítez, 1994; Cabello et al., 1996 a,b,c). En el caso de ”mosca blanca” y ”trips occidental de las flores” se trata de insectos de pequeño tamaño, que se sitúan entre los 0,3 y 2,0 mm de longitud, respectivamente; sin embargo, sobre la planta la primera especie es móvil, y la segunda es inmóvil en sus estados inmaduros. Por el contrario ”heliothis”, presenta estados inmaduros de un pequeño tamaño inicial, en estado de huevo (0,5mm) y primeros estadios larvarios (2,0-3,0mm), pero al avanzar su máximo desarrollo, su tamaño se triplica (30,0 - 35,0mm), lo que la hace más difícilmente de depredar por otros insectos.

En el caso de los depredadores empleados en el control biológico de estas especies plagas, destacan las especies de *Orius* y *Macrolophus*. El primer depredador es un Heteróptero, de la familia *Anthcoridae*; su tamaño es muy similar al de sus presas, desde 0,4 mm. en los primeros estados de su desarrollo, hasta los 2,0 a 3,0 mm. en estado adulto. Por el contrario, *Macrolophus caliginosus* Wagner, se trata también de un Heteroptero (*Miridae*) que de mayor es casi el doble del anterior, pudiendo llegar los adultos hasta los 5,5 mm.

Los datos empleados, que no han sido publicados, corresponden a los resul-

tados de tres ensayos realizados en el control biológico de las especies plagas, con los depredadores anteriormente mencionados (Cabello, 1998, com. pers.; García Jiménez, 1998, com. pers.). En el caso de un solo depredador- una presa, se ha utilizado los datos del control biológico mediante el depredador *Orius* sp., de la especie plaga *Frankliniella occidentalis* en cultivo de pimiento en invernadero, localizado en la Mojonera (Almería), durante las campaña 1991/92, y 1997/98. En el primer caso se realizaron sueltas del depredador de forma quincenal, y una dosis de suelta de 1 individuo cada 2 plantas. En el segundo caso la dosis de suelta fue la misma, pero sólo se realizó una vez, concretamente en la décima semana del cultivo.

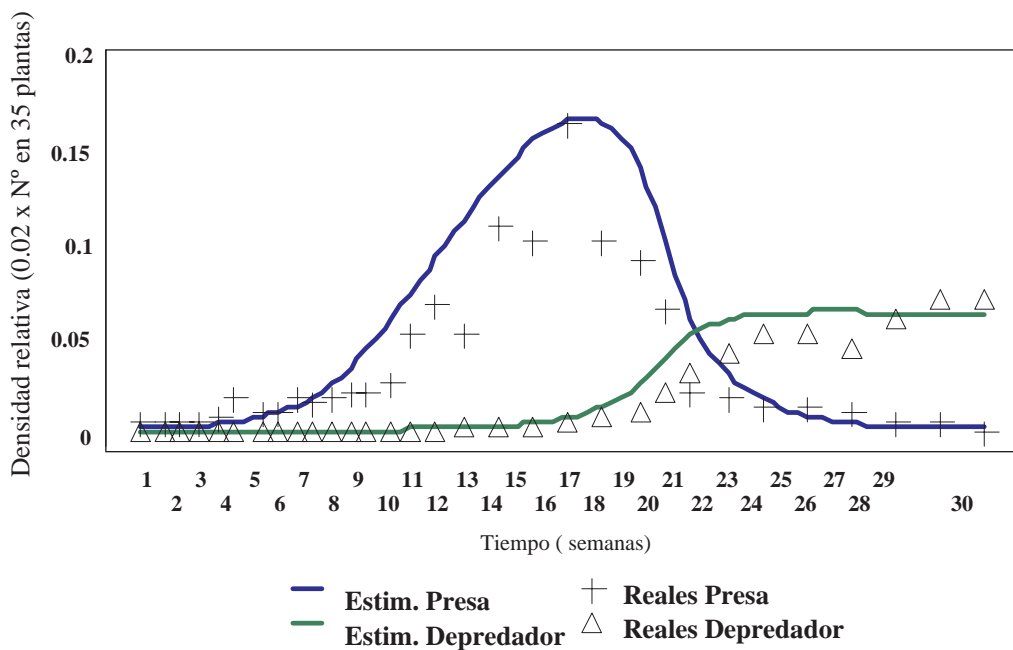
Para la aplicación del modelo depredador-presa, con dos presas y un solo depredador, se emplearon los datos de lucha biológica contra *Helicoverpa armigera* y *Bemisia tabaci*, con el depredador: *Macrolophus caliginosus*, en un cultivo de tomate en invernadero, localizado en Mazarrón (Murcia), durante la campaña 1996/97. En el presente caso la dosis de liberación del depredador fue de 1 por planta, y se realizó en la quinta semana del cultivo.

En todos los casos hemos intentado ajustar mediante un modelo depredador-presa con fricción, donde el depredador experimenta una reproducción en el desarrollo de su población, concretamente lo expresamos mediante el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i \left[a_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j \Leftrightarrow d_i y \right] \\ y' &= y \left[\alpha + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \Leftrightarrow \gamma y \right] \end{aligned}$$

5.3.1 Aplicación al caso de Orius-Frankliniella

Gráfico 1. Valores observados (símbolos) y estimados (líneas continuas) de la dinámica de población de la especie plaga: *Frankliniella occidentalis* (Thys.: *Thripidaeae*) y su depredador :*Orius* sp.(Hem: *Anthocoridae*) en cultivo de pimiento en invernadero, localizado en la Mojonera (Almería), en la campaña 1997/98.

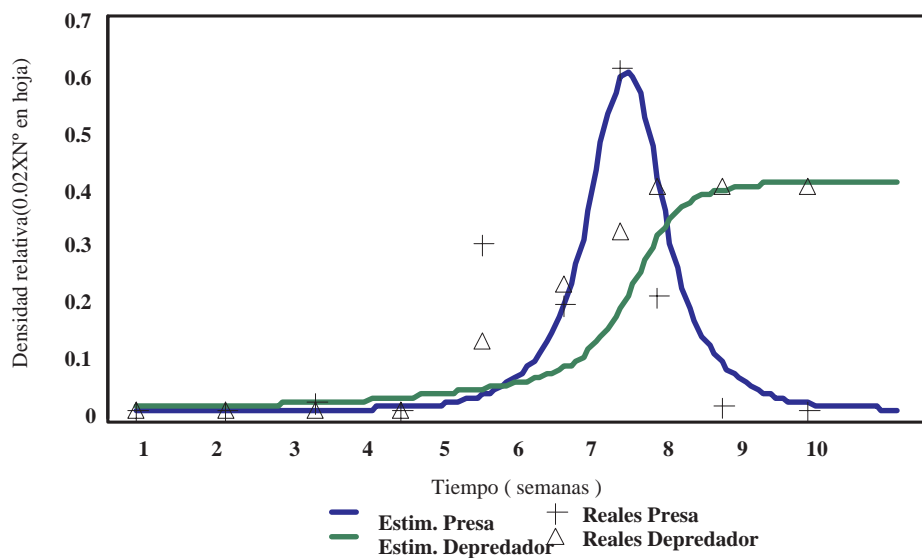


Cuadro 1. Valores del ajuste al modelo depredador-presa del control biológico de la especie plaga: *Frankliniella occidentalis* (Thys.: *Thripidaeae*) por el depredador: *Orius* sp. (Hem: *Anthocoridae*) en cultivo de pimiento en invernadero, localizado en la Mojonera (Almería), en la campaña 1997/98.

Coeficientes del ajuste						Depredador		Presa	
a_1	b_{11}	d_1	α	β_1	γ	g.l. total	r^2	g.l. total	r^2
0.333	1.1	17	0.25	2.7	5	28	0.9216	28	0.9026

En el gráfico 1 se recogen los valores observados y los estimados de la dinámica de población de la especie plaga: *Frankliniella occidentalis* (Thys.: *Thripidae*) y su depredador: *Orius* sp. (Hem: *Anthocoridae*) en cultivo de pimiento en invernadero, localizado en la Mojonera (Almería), en cultivo de pimiento, durante la campaña 1997/98. Los coeficientes de ajuste conseguido por el modelo depredador-presa se recogen en el cuadro 1, así como los estadísticos de comparación donde por g.l. total entendemos como grados totales de libertad y por r^2 el coeficiente de correlación, los cuales presentaron una alta significación ($P < 0.01$).

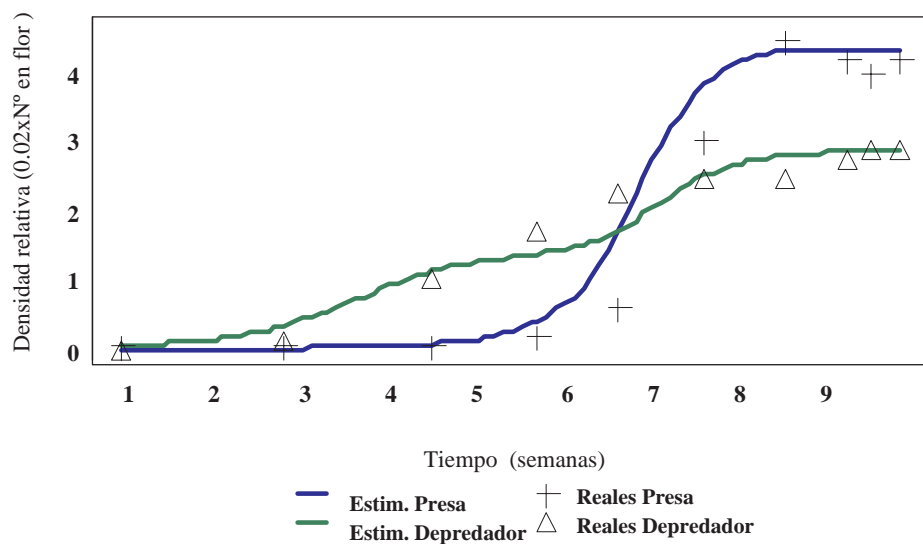
Gráfico 2. Valores observados (símbolos) y estimados (líneas continuas) de la dinámica de población de especies plaga: *Frankliniella occidentalis* (Thys.: *Thripidae*) y su depredador: *Orius* sp. (Hem: *Anthocoridae*) en hojas, cultivo de pimiento en invernadero, localizado en la Mojonera (Almería), en la campaña 1991/92.



Cuadro 2. Valores del ajuste al modelo depredador-presa del control biológico de la especie plaga: *Frankliniella occidentalis* (Thys.: *Thripidae*) por el depredador: *Orius* sp. (Hem: *Anthocoridae*) en hojas, cultivo de pimiento en invernadero, localizado en la Mojonera (Almería), en la campaña 1991/92.

Coeficientes del ajuste						Depredador		Presa	
a_1	b_{11}	d_1	α	β_1	γ	g.l. total	r^2	g.l. total	r^2
2.25	0.1	11	0.7	1.2	1.9	8	0.8801	8	0.8970

Gráfico 3. Valores observados (símbolos) y estimados (líneas continuas) de la dinámica de población de especies plaga: *Frankliniella occidentalis* (Thys.: *Thripidae*) y su depredador: *Orius* sp. (Hem: *Anthocoridae*) en flores , cultivo de pimiento en invernadero, localizado en la Mojonera (Almería), en la campaña 1991/92.



Cuadro 3. Valores del ajuste al modelo depredador-presa del control biológico de la especie plaga: *Frankliniella occidentalis* (Thys.: *Thripidae*) por el depredador: *Orius* sp. (Hem: *Anthocoridae*) en flores, cultivo de pimiento en invernadero, localizado en la Mojonera (Almería), en la campaña 1991/92.

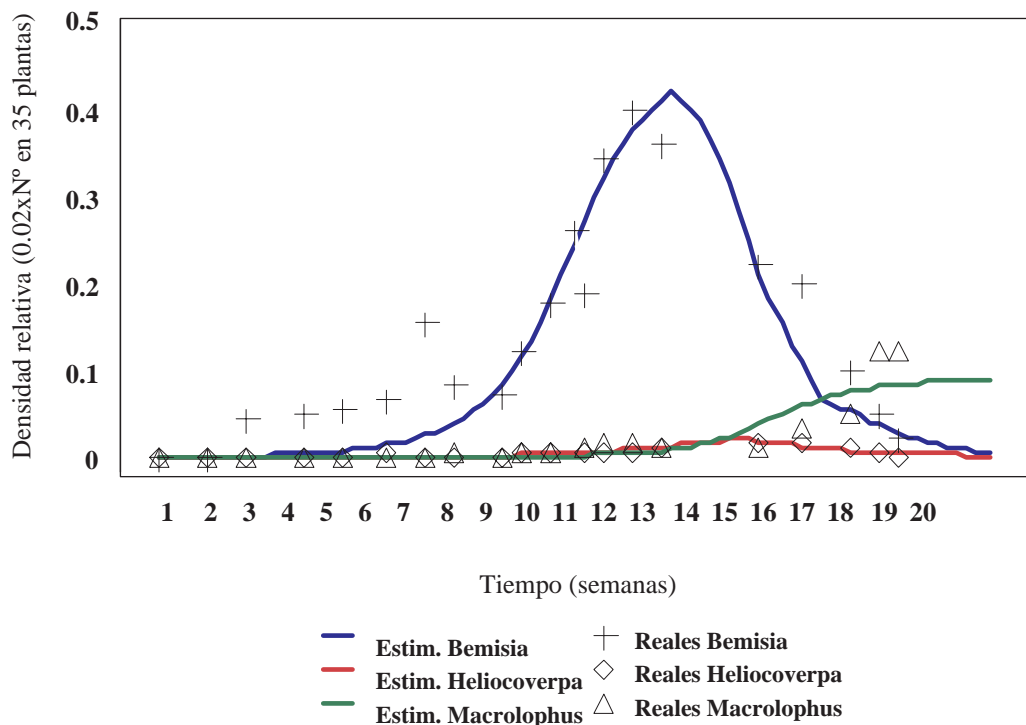
Coeficientes del ajuste						Depredador		Presa	
a_1	b_{11}	d_1	α	β_1	γ	g.l. total	r^2	g.l. total	r^2
3.1	0.07	0.99	2.5	0.66	2	8	0.9414	8	0.9619

Los valores observado (símbolos) y estimados (líneas continuas) de la dinámica de población de la especie plaga: *Frankliniella occidentalis* (Thys.: *Thripidae*) y su depredador: *Orius* sp. (Hem: *Anthocoridae*) en hojas, cultivo de pimiento en invernadero, localizado en la Mojonera (Almería), durante la campaña 1991/92, se recogen en la gráfica 2 cuando se muestrearon hojas, y en la gráfica 3 para muestreo en flores. En los cuadros 2 y 3 se presentan los coeficientes de ajuste del modelo, así como los estadísticos de comparación, que en el presente caso fueron también altamente significativos ($P < 0.01$), tanto en hojas, como en flores.

El modelo depredador-presa, como se observa en los dos ejemplos, se ajusta bien a los datos reales de campo. Ellos constituyen casos de aplicación de la lucha biológica contra plagas, en concreto la realización de sueltas del depredador *Orius* contra la plaga *F. occidentalis*, en dos localizaciones distintas.

5.3.2 Aplicación al caso de Bemisia-Helicoverpa y Macrolophus.

Gráfico 4. Valores observados (símbolos) y estimados (líneas continuas) de la dinámica de la población de dos especies plaga: *Bemisia tabaci* (Hom.: *Aleyrodidae*) y *Helicoverpa armigera* (Lep.: *Noctuidae*), y su depredador: *Macrolophus caliginosus* (Hem.: *Miridae*) en cultivo de tomate, al aire libre, en Mazarrón (Murcia), en la campaña de 1996/97.



Cuadro 4. Valores del ajuste al modelo depredador-presa del control biológico de las dos especies plaga: *Bemisia tabaci* (Hom.: *Aleyrodidae*) y *Helicoverpa armigera* (Lep.: *Noctuidae*), por el depredador: *Macrolophus caliginosus* (Hem.: *Miridae*) en cultivo de tomate, al aire libre, en Mazarrón (Murcia), en la campaña de 1996/97.

Coeficientes del ajuste					
$a_i \ i = 1, 2$	$(b_{ij}) \ i, j = 1, 2$	$d_i \ i = 1, 2$	α	$\beta_i \ i = 1, 2$	γ
$\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.1 & \Leftrightarrow 6 \\ \Leftrightarrow 0.7 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 20 \\ 11 \end{pmatrix}$	0.2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	2
<i>Macrolophus</i>		<i>Bemisia</i>		<i>Helicoverpa</i>	
g.l. total	r^2	g.l. total	r^2	g.l. total	r^2
18	0.8208	18	0.8904	18	0.8208

Para el caso del modelo con un depredador y dos presa, la gráfica 4 representa los valores observados y estimados de la dinámica de población de dos especies plaga: *Bemisia tabaci* (Hom.: *Aleyrodidae*) y *Helicoverpa armigera* (Lep.: *Noctuidae*), y su depredador: *Macrolophus caliginosus* (Hem.: *Miridae*) en cultivo de tomate. Los coeficiente de ajuste, así como sus estadísticos se dan en el cuadro 4.

El modelo depredador-presa puede ser comparado con el estudio realizado por Hallam, T.G. y Zhien Ma. (1986) [28] para el conocimiento de procesos de reproducción y mortalidad de especies que cubren el espectro zoológico, donde estas pueden verse afectadas por factores exógenos que pueden afectar al parámetro demográfico, como es el caso de los tóxicos o pesticidas.

Así toma una ecuación de tipo Kolmogorov,

$$x' = xF(r(c(t)), x) \quad t \in [0, +\infty), \quad (5.8)$$

con x la densidad de población de la especie, $r(t)$ un parámetro demográfico y $c(t)$ un factor exógeno que puede afectar al parámetro demográfico.

En dicho trabajo se prueba que:

T1) La población de (5.8) es persistente cuando $r(c^*) > 0$.

T2) La población de (5.8) se extingue cuando $r(c_*) < 0$.

para $c^* = \limsup c(t)$; $c_* = \liminf c(t)$.

En nuestro caso podemos considerar como factor exógeno en el desarrollo de la plaga el que realiza sobre ella el depredador, de esta manera se tendría que $r(c(t)) = a_i \Leftrightarrow d_i y(t)$ comprobando que se verifica T1) para los casos de *Orius-Frankliniella* en hoja expresados en los gráficos 1 y 2, mientras que se tiene T2) para el caso de *Orius-Frankliniella* en flor, representado en el gráfico 3. Análogamente tendríamos una concordancia de dicho resultado con lo obtenido en el caso *Bemisia-Helicoverpa* y *Macrolophus* expresado en el gráfico 4.

La aplicación práctica del modelo, también ha resultado adecuada al caso de un solo depredador cuando se ha empleado en el control biológico de dos presas que constituyen plagas: *Bemisia* y *Helicoverpa*. La presente aplicación, conjuntamente con lo encontrado en el caso anterior (gráfico 4), se considera que demuestra de forma fehaciente la aplicabilidad del modelo. Su posterior utilización en la evaluación de eficacias en la depredación, empleada como herramienta de control de plagas, debe ser desarrollada. Sin embargo, se estima que el presente modelo puede ser eficaz para dicha valoración. Lo que supone actualmente una piedra angular de la estimación de la eficiencia, y forma de actuación de los agentes de control biológico.

5.4 Anexo

Utilizando el paquete informático del Mathematica, hemos desarrollado el siguiente programa el cual ha sido utilizado para los esquemas iterativos de los ejemplos 1 y 2 planteados al comienzo de este capítulo.

- Procedimiento Principal.

```
Clear ["Global"];

Presal[mb_,a_,d_,aalfa_,bbeta_,ggamma_,n_,error_,flag]:=
Module[{sx,sy=0,y,iter=0,listax={},listay={},er=109},
  While [iter<n &&er>error,
    iter++;
    sx=LinearSolve[mb,a-sy*d];
    If[EvaluacionSinAlfa,
      sy=Solve[ggamma*y==aalfa+({bbeta}.
        Transpose[{sx}][[1,1]],y][[1,1,2]],
      sy=Solve[ggamma*y==aalfa+({bbeta}.
        Transpose[{sx}][[1,1]],y][[1,1,2]]
    ];

    If[iter>1,
      er=Max[Abs[{sx-Last[listax], sy-Last[listay]}]]
    ];

    AppendTo[listax,sx];AppendTo[listay,sy];
  ];

Return[If[flag==1,{listax,listay,er},{sx,sy,er}]]
]
```

- Entrada de Datos.

```
file=Input[" Archivo de datos:"];
datos=ReadList[file,Number,NullRecord->True,RecordList->True];
n=Lenght[datos[[1]]];
mb=Table[datos[[i]],{i,1,n}];
a=datos[[n+1]];
d=datos[[n+2]];
bbeta=datos[[n+3]];
niter=datos[[n+4,1]];
error=datos[[n+5,1]];
flag=datos[[n+6]];
If[datos[[n+7]]=={ },EvaluacionSinAlfa=True, aalfa=datos[[n+7]];
flag=0;
(*Fin entrada*)
```

```
If[EvaluacionSinAlfa,
```

```
  (*Caso en que la variable "alpha" no está tomada del fichero de datos*)
```

```
  ss=Solve[({bbeta}.Inverse[mb].Transpose[{a}])[[1,1]]-x==0,x];
  mensaje1="Alfa(<<<ToString[ss[[1,1,2]]]>>>):";
  aalfa=Input[mensaje1];
```

```
  var2=Max[{Max[Table[({bbeta}.Inverse[mb].Transpose[{a}])[[1,1]]-aalfa*
    (Inverse[mb].Transpose[{d}])[[i,1]]/(Inverse[mb].Transpose[{a}])[[i,1]],
    {i,1,Length[a]}]],
    ({bbeta}.Inverse[mb].Transpose[{d}])[[1,1]]}],
```

```
  (* Caso en que la variable "alpha puede tomar sólo valores positivos *)
```

```
  var2=Max[Table[({bbeta}.Inverse[mb].Transpose[{a}])[[1,1]]+aalfa*
    (Inverse[mb].Transpose[{d}])[[i,1]]/(Inverse[mb].Transpose[{a}])[[i,1]],
    {i,1,Length[a]}]]
```

```
];
```

```
  mensaje2="Gamma(>>>ToString[var2]>>>):";
```

```
  ggamma=Input[mensaje2];
```

- Resolución Numérica. Presentación de Resultados.

```

(*Resolución por Métodos Iterativos del Sistema Diferencial *)
sol=Preso[mb,a,d,aalfa,bbeta,ggamma,niter,error,flag];

(*Presentación de los Resultados*)
If[flag==1,
  (* Visualización de la sucesión de iteraciones obtenidas *)
  Print["Lista x:",MatrixForm[sol[[1]]]];
  Print[""];
  lp={};li={};
  For[i=1,i<=Length[sol[[2]]],i++,
    If[Mod[i,2]==0,AppendTo[lp,sol[[2,i]]],
      AppendTo[li,sol[[2,i]]]
    ]
  ];
  Print[li,lp],

  (* Solución final ajustada a la cota de error establecida. *)
  Print["x=",sol[[1]]];
  Print["y=",sol[[2]]];
  Print["Errores=",sol[[3]]];
]

```


Apéndice

A.1 Lema de Barbalat

Lema A.1.1. *Sea una función diferenciable $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

- i) Existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$,*
- ii) $f'(t)$ es uniformemente continua.*

Entonces,

$$f'(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Demostración. Dado un $\epsilon > 0$ tomamos $\delta > 0$ tal que,

$$|f'(t) \Leftrightarrow f'(s)| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ si } |t \Leftrightarrow s| \leq 2\delta.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\tau_n \in (n\delta, n\delta + \delta)$ tal que

$$f(n\delta + \delta) \Leftrightarrow f(n\delta) = \delta f'(\tau_n).$$

Por *i)* se verifica que, $f(n\delta + \delta) \Leftrightarrow f(n\delta) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, de modo que $f'(\tau_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

En particular, existe un valor $N \geq 1$ tal que

$$|f'(\tau_n)| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ si } n \geq N.$$

Hemos de notar que se cumple, $\tau_{n+1} \Leftrightarrow \tau_n < 2\delta$, y así, dado $t \geq \tau_N$ escogemos un valor $n \geq N$ tal que $\tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}$.

Entonces se tiene que $t \Leftrightarrow \tau_n < 2\delta$ y en consecuencia,

$$|f'(t) \Leftrightarrow f'(\tau_n)| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

de donde resulta que,

$$f'(t) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

■

Del lema anterior se puede obtener un resultado preciso para cuando la función es de la siguiente forma.

Corolario A.1.2. *Sea $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una función uniformemente continua tal que,*

$$\int_0^\infty g(t)dt < +\infty.$$

Entonces, $g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow +\infty$.

Demostración. Bastaría aplicar el Lema anterior a la función $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida como $f(t) = \int_0^t g(s)ds$, lo que completaría la prueba. ■

A.2 Teorema de la Función Implícita

En esta sección demostramos una versión del Teorema de la Función Implícita, que puede encontrarse en [23], donde la demostración la exponemos por completitud.

Teorema A.2.1. Sean X, Y espacios de Banach, Λ un espacio topológico y U un subconjunto abierto de X . Sea $\Phi : U \times \Lambda \rightarrow Y$ una función continua con derivada parcial continua $\Phi_x : U \times \Lambda \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$. Si $\Phi(x_0, \lambda_0) = 0$ y Φ_x es invertible para algún $(x_0, \lambda_0) \in U \times \Lambda$, entonces existe una función continua

$$\Psi : N \rightarrow B(x_0, r) \subset \bar{B}(x_0, r) \subset U,$$

definida en un entorno N de λ_0 con las siguientes propiedades:

- i) $\Phi(\Psi(\lambda), \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in N$
- ii) Si $\Phi(x_1, \lambda_1) = 0$, $\lambda_1 \in N$ y $x_1 \in B(x_0, r)$ entonces $x_1 = \Psi(\lambda_1)$. En particular $\Psi(\lambda_0) = x_0$

Demostración. Definimos $L(\lambda) = \Phi_x(x_0, \lambda)$, $R(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) \Leftrightarrow L(\lambda)x$ y $a = \|L(\lambda_0)^{-1}\|^{-1}/4$. Como Φ_x es continua, existe $r > 0$ y un entorno N_0 de λ_0 tal que la bola cerrada $\bar{B}(x_0, r)$ está contenida en U y,

$$\|\Phi_x(x, \lambda) \Leftrightarrow \Phi_x(x_0, \lambda)\| \leq \frac{a}{2} \quad ; \quad x \in \bar{B}(x_0, r), \quad \lambda \in N_0.$$

De donde aplicando el Teorema del Valor Medio se tiene,

$$\|R(x, \lambda) \Leftrightarrow R(z, \lambda)\| \leq a\|x \Leftrightarrow z\| \quad ; \quad x, z \in \bar{B}(x_0, r), \quad \lambda \in N_0. \quad (\text{A.1})$$

Fijamos N_1 entorno de λ_0 contenido en N_0 tal que,

$$\|L(\lambda) \Leftrightarrow L(\lambda_0)\| \leq \frac{1}{2}\|L(\lambda_0)^{-1}\|^{-1} \quad \forall \lambda \in N_1. \quad (\text{A.2})$$

Es conocido que $L(\lambda)$ es invertible y,

$$\|L(\lambda)^{-1}\| \leq 2\|L(\lambda_0)^{-1}\| \quad \forall \lambda \in N_1.$$

Finalmente dado que $\Phi(x_0, \lambda_0) = 0$, existe un entorno N de λ_0 contenido en N_1 tal que,

$$\|\Phi(x_0, \lambda)\| < ar \quad \forall \lambda \in N.$$

Como $\lambda \in N$, definimos $T_\lambda : \overline{B}(x_0, r) \rightarrow E$ por,

$$T_\lambda(x) := \Leftrightarrow L(\lambda)^{-1}R(x, \lambda).$$

Notamos que por (A.1)-(A.2)

$$\|T_\lambda(x) \Leftrightarrow T_\lambda(z)\| \leq \|L(\lambda)^{-1}\| \|R(x, \lambda) \Leftrightarrow R(z, \lambda)\| \leq \frac{1}{2}\|x \Leftrightarrow z\|.$$

También se tiene que.

$$T_\lambda(x) \Leftrightarrow x_0 = \Leftrightarrow L(\lambda)^{-1}[L(\lambda)x_0 + R(x_0, \lambda)] = \Leftrightarrow L(\lambda)^{-1}[\Phi(x_0, \lambda) + R(x_0, \lambda) \Leftrightarrow R(x_0, \lambda)]$$

y así,

$$\|T_\lambda(x) \Leftrightarrow x_0\| \leq \|L(\lambda)^{-1}\| [\|\Phi(x_0, \lambda)\| + \|R(x_0, \lambda) \Leftrightarrow R(x_0, \lambda)\|] \leq$$

$$2\|L(\lambda_0)^{-1}\| [ar + a\|x \Leftrightarrow x_0\|] < 4ar\|L(\lambda_0)^{-1}\| = r.$$

Como, T_λ es una aplicación de $\overline{B}(x_0, r)$ en $B(x_0, r)$, por el Teorema del Punto Fijo de Banach, T_λ tiene un único punto fijo $\Psi(\lambda)$ en $B(x_0, r)$.

Si $0 = \Phi(\lambda_1, x_1) = L(\lambda_1)x_1 + R(x_1, \lambda_1)$, para algún $(x_1, \lambda_1) \in B(x_0, r) \times N$, entonces $x_1 = \Leftrightarrow L(\lambda_1)^{-1}R(x_1, \lambda_1) = T_{\lambda_1}(x_1)$, con lo cual $x_1 = \Psi(\lambda_1)$. Por otra

parte, $\Psi(\lambda) = T_\lambda(\Psi(\lambda)) = \Leftrightarrow L(\lambda)^{-1}R(\Psi(\lambda), \lambda)$ y también, $0 = L(\lambda)\Psi(\lambda) + R(\Psi(\lambda), \lambda) = \Phi(\Psi(\lambda), \lambda)$.

Para finalizar la prueba fijamos $\bar{\lambda} \in N$ y notamos que,

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda) \Leftrightarrow \Psi(\bar{\lambda}) &= L(\lambda)^{-1}R(\Psi(\lambda), \lambda) \Leftrightarrow L(\bar{\lambda})^{-1}R(\Psi(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}) = \\ &= L(\lambda)^{-1}[R(\Psi(\bar{\lambda}), \lambda) \Leftrightarrow R(\Psi(\lambda), \lambda)] + L(\bar{\lambda})^{-1}R(\Psi(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}) \Leftrightarrow L(\lambda)^{-1}R(\Psi(\bar{\lambda}), \lambda), \end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned} \|L(\lambda)^{-1}[R(\Psi(\bar{\lambda}), \lambda) \Leftrightarrow R(\Psi(\lambda), \lambda)]\| &\leq \|L(\lambda)^{-1}\|a\|\Psi(\bar{\lambda}) \Leftrightarrow \Psi(\lambda)\| \\ &\leq 2\|L(\lambda_0)^{-1}\|a\|\Psi(\bar{\lambda}) \Leftrightarrow \Psi(\lambda)\| = \frac{1}{2}\|\Psi(\lambda) \Leftrightarrow \Psi(\bar{\lambda})\|. \end{aligned}$$

De donde, $\|\Psi(\lambda) \Leftrightarrow \Psi(\bar{\lambda})\| \leq 2\|L(\lambda)^{-1}R(\Psi(\bar{\lambda}), \lambda) \Leftrightarrow L(\bar{\lambda})^{-1}R(\Psi(\bar{\lambda}), \bar{\lambda})\|$, y la continuidad de Ψ se sigue de los siguientes hechos,

$$L(\lambda)^{-1} \rightarrow L(\bar{\lambda})^{-1} \quad \text{y} \quad R(\Psi(\bar{\lambda}), \lambda) \rightarrow R(\Psi(\bar{\lambda}), \bar{\lambda}) \quad \text{cuando} \quad \lambda \rightarrow \bar{\lambda}.$$

■

Bibliografía

- [1] Amann, H. *Ordinary differential equations*. Walter Gruyter, Berlin, (1990).
- [2] Arditi, R. ; Berryman, A.A. The biological control paradox. *Trends in Ecology an Evolution*, 6, (1991).
- [3] Arditi, A. ; Ginzburg, L.R. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence. *Jour. of Theo. Biology*, 139, (1989), 311-326.
- [4] Barbalat, I. Systemes d'equations differentielles d'oscilations nonlinearies. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 4, (1959), 267-270.
- [5] Baungärtner, J. ;Gutierrez, A.P. Simulation techniques applied to crops and pest models. En: Cavalloro, R.; DeLucchi, V. (Ed.).Parasitis 88. Proceeding of a Scientific Congress. Barcelona 25-28 de octubre 1988. *Boletin de Sanidad Vegetal, Plagas*; Fuera de serie, 17, (1989), 175-214.
- [6] Beckage, N.E. ; Thompson, S.N. ; Federici, B.A. *Parasites and pathogens of insects*. Academic Press. San Diego, Vol. 1:parasites. Vol. 2:pathogens. (1993).
- [7] Belda, J.; Cabello, T.; Ortiz, J.; Pascual, F. Distribución de *Frankliniella occidentalis* (Pergande) (Thys.: Thripidae) en cultivo de pimiento bajo

- plástico en el sureste de España. *Boletín de Sanidad Vegetal, Plagas*, 18, (1992), 237-252.
- [8] Berryman, A.A. *Population systems*. Plenum, New York, USA, (1981).
- [9] Berryman, A.A. Population theory: an essential ingredient in pest prediction, management, and policy-making. *American Entomologist*, 37, (1991), 138-142.
- [10] Cabello T. *Racionalización del empleo de fitosanitarios: eficacia, técnicas de aplicación y respeto a la fauna auxiliar*. Encuentro ambiental almeriense. Documentación de la comisión de trabajo "Agricultura intensiva", Almería, (1998), 26-52.
- [11] Cabello, T.; Belda, J. Noctuidos (Lep.; Noctuidae) plagas en cultivos hortícolas en invernaderos. En: Moreno Vázquez (Ed.). *Sanidad vegetal en la horticultura protegida*. Junta de Andalucía, Sevilla, (1994), 179-211.
- [12] Cabello, T.; Benítez, E. *Frankliniella occidentalis* (Thysanoptera; Thripidae). Plaga de cultivos hortícolas en invernadero. En: Moreno Vázquez, R. (Ed.). *Sanidad vegetal en la horticultura protegida*. Junta de Andalucía, Sevilla (1994), 240-259.
- [13] Cabello, T.; Cañero, R. Technical efficiency of plant protection in Spanish Greenhouses. *Crop. Protection*, 13(2), (1994), 153-159.
- [14] Cabello, T.; Benítez, E.; Pascual, F. Incidencia actual del trips de las flores (*Frankliniella occidentalis*)(Thys.; Thripidae) en cultivos en invernadero y su control. *Horto-información*, 75, (1996a), 39-42.

- [15] Cabell, T.; Carricondo, I.; Justicia, L.; Belda, J. Biología y control de las especies de mosca blanca: *Trialeurodes vaporariorum* (Gen.) y *Bemisia tabaci* (West.) (Hom.; Aleyrodidae) en cultivos hortícolas en invernaderos. Junta de Andalucía. Sevilla, (1996b), 96 pp.
- [16] Cabello, T.; González, M.P.; Justicia, L.; Belda, J. Plaga de noctuidos (Lep.; Noctuidae) y su fenología en cultivos en invernaderos. Junta de Andalucía. Sevilla, (1996c), 145 pp.
- [17] Carreño, R. Modelos logísticos. Aplicaciones a la agronomía. *Tesis Doctoral*, Universidad de Almería, (1996), 168 pp.
- [18] Carreño, R. ; Gámez, M. ; Granados, B. ; Tineo, A. Continuous dependence of the global attractors of family of periodic kolmogorov systems. Application to a n prey-one predator system. (1998), sometido a publicación.
- [19] Coddington, E. ; Levinson, N. *Theory of ordinary Differential Equations*. Krieger Publishing, (1984).
- [20] Curry, G.; DeMichele, D.W. Stochastic analysis for the description and synthesis of predator-prey systems. *it Canad. Entomol.*, 109, (1977), 1167-1174.
- [21] DeBach, P. *Lucha biológica contra los enemigos de las plantas*. Editorial Mundi-Prensa. Madrid, (1977), 399 pp.
- [22] DeBach, P. *Control biológico de las plagas de insectos y malas hierbas*. CECSA. México, (1984), 949 pp.

-
- [23] Deimling, K. *Nonlinear functional analysis*. Springer-Verlay, (1985), pag 148.
- [24] Dent, D. *Insect pest management*. C.A.B.-International. Wallingford, (1991), 604 pp.
- [25] Gámez, M. ; Carreño, R. Persistence in the means for some competitive systems. *Nonlinear Studes*, 1, (1999), .
- [26] Hale, J. *Ordinary Differential Equations* . Krieger Publishing Company, (1980).
- [27] Hale, J. ; LaSalle, J. *Differential equations and dynamical systems*. Academic Press, New York. (1967).
- [28] Hallam, T.G. ; Zhien Ma. Persistence in population models with demographic fluctuations. *Jour. Math. Biol.*, 24, (1986), 327-339.
- [29] Hartman, P. *Ordinary differential equations*. Birkauser, Boston. (1982).
- [30] Hassell, M.P. Evaluation of parasites and predator responses. *Jour. Animal Ecol.*, 35, (1966), 65-75.
- [31] Hassell, M.P. *Dinámica de la competencia y la depredación*. Oikos-tau Barcelona, (1988), 102 pp.
- [32] Hassell, M.P. ; Waage, J.K. Host-parasitoid population interactions. *Ann. Rev. Entomol.*, 29, (1984), 89-114.
- [33] Hill, D.S. *Agrcultural insect pests of temperate regions and their control*. Cambridge University Press. Cambridge, (1987), 659 pp.

-
- [34] Hirsch, W. ; Smale, S. *Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal*. Alianza Editorial, (1983).
- [35] Hofbauer, J. ; Sigmond, K. *The theory of evolution and dynamical systems* . London Mathematical Soc. student, 7, (1988).
- [36] Holling, C.S. The components of predation as revealed by a study of small mammal predation of the european pine sawfly. *Canad. Entomol.*, 91, (1959), 293-320.
- [37] Holling, C.S. An experiment component analysis of populations processes. *Memoirs of the Ento. Soc. of Canada*, 32, (1963), 22-32.
- [38] Holling, C.S. The functional reponse of invertebrate predator to prey density. *Memoirs of the Ento. Soc. of Canada*, 48, (1966), 1-86.
- [39] Huffaker, C.B. *New technology of pest control*. John Wiley and Sons. Nueva York, (1980), 500 pp.
- [40] Huffaker, C.B.; Rabb, R.L. *Ecological entomology*. John Wiley and Sons. Nueva York, (1984), 844 pp.
- [41] Huffaker, C.B.; Stinner, R. The role of natural enemies in pest control programas. *En: Anón. Entomological essays to commemorate the retirement of Prof. K. Yasumatsu. Tokio*, (1971), 333-350.
- [42] Jervis, M.; Kidd, N. *Insect natural enemies*. Chapman and Hall. Londres, (1997), 491 pp.

-
- [43] Kamke, E. Zur theorie der system gewöhnlicher differentialgleichungen. *II Acta Mat.*, 58, (1932), 57-85.
- [44] Kelley, J.L. *General topology*. D. Van Nostrand, 1955.
- [45] Ladde, G.S. ; Lakshmikantham, V. ; Vatsala, A.S. *Monotone iterative techniques for nonlinear differential equations*. Pitman, London. (1985).
- [46] Lazer, A. Characteristic exponents and diagonal dominant linear systems. *Jour. Math. Anal. Appl.*, 35, (1971), 215-229.
- [47] Lewis, T. *Thrips as crops pests*. C.A.B. International. Wallingford, (1997), 740 pp.
- [48] López-Gómez, J. ; Ortega, R. ; Tineo, A. The periodic predator-prey Lotka-Volterra model. *Advances in Differential Equations*, 3, (1996), 403-423.
- [49] Lotka, A.J. *Elements of physical biology*. Williams & Wilkins, Baltimore, Maryland, USA, (1925).
- [50] Mackauer, M.; Ehler, L.E.; Roland, J. *Critical issues in biological control*. Intercept. Andover, (1990), 330 pp.
- [51] May, R.M.; Hassell, M.P. Population dynamics and biological control. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. B*, 318, (1988), 129-169.
- [52] Mills, N.J.; Getz, W.M. Modelling the biological control of insect pests-A review of host-parasitoid models. *Ecological modelling*, 92, (1996), 121-143.

-
- [53] Nicholson, A.J. The balance of animal populations. *Jour. Animal Ecol.*, 2, (1933), 132-178.
- [54] Nicholson, A.J. ; Bailey, V.A. The balance of animal populations. *Proceedings of the Zool. Soc. of London*, 3, (1935), 551-598.
- [55] Norton, G.A.; Mumford, J.D. *Decision tools for pest management*. C.A.B. International. Wallingford, (1993), 279 pp.
- [56] Novo, S. ; Obaya, R. ; Rojo, J. *Ecuaciones y sistemas diferenciales*. McGraw-Hill, Madrid. (1983).
- [57] Royama, T. A comparative study of models for predation and parasitism. *Res. Popul. Ecol. Kyoto Univ.*, 1, (1971), 90 pp.
- [58] Sabelis, M.W. Predation on spider mites. En: Helle, W.; Sabelis, M.W. (Eds). Spider mites. *Their biology, natural enemies and control*. Vol 1B. Elsevier. Amsterdam, (1985), 103-129.
- [59] Samways, M.J. *Control biológico de plagas y malas hierbas*. Oikos-tau. Barcelona, (1990), 84 pp.
- [60] Solomon M.E. The natural control of animal population. *Jour. of Animal Ecology*, 18, (1949), 1-35.
- [61] Taylor, A.E. *Introduction to functional analysis*. Jhon Wiley and Sons, 1958.
- [62] Tineo, A. Existence of global attractors for a class of periodic kolmogorov systems. *Jour. Math. Anal. Appl.*, (1998), por aparecer.

-
- [63] Tineo, A. *An introduction to periodic competitive systems*. Decima Escuela Venezolana (Merida), 1997.
- [64] Tineo, A. Iterative schemes for some population models. *Nonlinear World*, 3, (1996), 695-708.
- [65] Tineo, A. An iterative schemes for the n-competing species problem. *Jour. of Differ. Equations*, 116, (1995), 1-15.
- [66] Tineo, A. Asymptotic behaviour of positive solutions of the nonautonomous Lotka-Volterra competition equations. *Differ. and Integral Equation*, 6 N 2, (1993), 449-457.
- [67] Tineo, A. On the asymptotic behaviour of some population models. *Jour. Math. Anal. Appl.*, 167, (1992), 516-529.
- [68] Verhulst, P.F. *Notice sur la loi que la population suite dans son accroissement*. *Correspondence Mathematique et Physique*, 10, (1838), 113-121.
- [69] Volterra, V. Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi. *Mem. Roy. Acad. Naz. Dei Lincei*, 2 (1926), 31-113.
- [70] Watt, K.E.F. A mathematical model of effect of densities of attacked and attacking species on the number attacked. *Canad. Entomol.*, 91 (1959) 129-144.

