Tema 4. Teoría Semántica.

4.1. Introducción

La teoría semántica del cálculo proposicional utiliza la misma simbolización que en los capítulos anteriores. En deducción natural, una estructura deductiva era válida (razomaiento correcto), si a partir de las premisas, usando los axiomas y reglas de inferencia, podíamos llegar a la conclusión. Ahora, para discutir sobre la validez de una estructura deductiva, lo haremos mediante la asignación de significados a las proposiciones.
La descripción de este sistema está formado por:

- Conjunto de significados de las proposiciones.
- Definición semántica de las conectivas.
- Definición semántica de deducción correcta.

4.2. Definición semántica de las proposiciones

A una proposición sólo se le puede asignar dos valores

V	Si la proposición es verdadera
F	Si la proposición es falsa

4.3. Definición semántica de las conectivas

- Negación

$$\begin{array}{cc} A & \neg A \\ \hline V & F \\ F & V \end{array}$$

- Conjunción

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Disyunción

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Implicación o condicional simple

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Equivalencia o deble condicional

A	B	$A \leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

4.4. Diagrama de valores de certeza

Debemos conocer el valor semántico de cada una de las proposiciones atómicas.

Ejemplo 1:

$$(\ P \ \vee \ Q \ ) \ \wedge \ R$$

4.5. Evaluación de fórmulas. Tablas de verdad

Ejemplo 2:

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

				A		B	
p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$A \leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	V

- Interpretación: Una asignación particular de significados. Se corresponde con una línea de la tabla.
- Modelo: Interpretación cuyo resultado es V.
- Tautología: Si el significado es siempre verdad.
- Contradicción: Si el significado es siempre falso.
- Falacia: Si el significado es diferente según la interpretación.

4.6. Concepto semántico de deducción

Dada una estructura deductiva

$$P_1, P_2, \dots, P_n \Rightarrow Q$$

decimos que es correcta cuando no existe ninguna interpretación que simultaneamente haga a las premisas $P_1, P_2, \dots, P_n$ verdaderas y a la conclusión Q falsa.

Ejemplo 3:

$$A, A \rightarrow B \Rightarrow B$$

A	B	$A \rightarrow B$	B
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

4.7. Tautología asociada a una deducción correcta

Lo que nos dice el teorema de la deducción es que si la estructura deductiva

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \Rightarrow Q$$

es correcta o válida, entonces también lo es (demostrar)

$$P_1, P_2, \ldots, P_{n-1} \Rightarrow P_n \to Q$$

Si seguimos realizando la misma operación sucesivamente, también serán validas las estructuras

$$\begin{gathered} P_1, P_2, \ldots, P_{n-2} \Rightarrow P_{n-1} \to (P_n \to Q) \\ P_1, P_2, \ldots, P_{n-3} \Rightarrow P_{n-2} \to (P_{n-1} \to (P_n \to Q)) \\ \vdots \\ P_1 \Rightarrow P_2 \to (P_3 \to (P_4 \to \ldots (P_n \to Q) \ldots) \\ \Rightarrow P_1 \to (P_2 \to (P_3 \to (P_4 \to \ldots (P_n \to Q) \ldots)) \end{gathered}$$

Y cuando tenemos algo de la forma $\Rightarrow A$, quiere decir que no hace falta ninguna premisa para que se deduzca A, o lo que es lo mismo, A siempre es verdad y por lo tanto debe ser una tautología.

4.8. Álgebra de Boole

A partir de los significados $\{V, F\}$ o $\{0, 1\}$ definimos las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} * & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} ' & \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}$$

Definición 4.1 $<\ \{0,1\},+,*,'>$ *es un álgebra de boole con las siguientes propiedades:*

1. *Conmutativa:*

$$x + y = y + x$$
$$yx * xy$$

2. *Existencia de Elemento Neutro.*

$$x + 0 = x \qquad x * 1 = x$$

3. *Distributiva*

$$x + (yz) = (x + y)(x + z)$$
$$x(y + z) = xy + xz$$

4. *Complementario*

$$x + x' = 1 \qquad xx' = 0$$

5. *Idempotencia*

$$x + x = x \qquad x * x = x$$

6. *Absorción*

$$x + xz = x$$
$$x(x + y) = x$$

7. *Dominación*

$$x + 1 = 1 \qquad x * 0 = 0$$

8. *Doble negación*

$$(x')' = x$$

9. *Asociativa*

$$x(yz) = (xy)z$$
$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

10. *Morgan*

$$(x + y)' = x'y'$$
$$(xy)' = x' + y'$$