El método de las dos funciones de distribución: la versión trapezoidal

JOSÉ GARCÍA PÉREZ (*)

JUAN E. TRINIDAD SEGOVIA (**)

JUAN GÓMEZ GARCÍA (***)

1. INTRODUCCIÓN

Como es conocido, el primer trabajo en el que se habla del método de las dos distribuciones Beta y de su aplicación a la valoración de Tierras es el artículo de Ballestero, E. (1971). En el mismo, en la p. 226, el autor afirma: «*Es frecuente que las estadísticas de transacciones indiquen un precio mínimo, un precio máximo y un precio normal (moda de la distribución de precios) ... Las mismas razones que aconsejan el uso de la distribución Beta en el cálculo de tiempos medios de las actividades de un PERT, aconsejan también el uso de dicha distribución en el problema que nos ocupa*», y a continuación presenta una aplicación del método a la concentración parcelaria. Este primer trabajo es, sin duda, el origen de otros posteriores a los que se hará referencia más adelante.

El «*Método de las dos Betas*» fue formalmente presentado por Ballestero, E. (1973), como mejora del método sintético que como se sabe está basado simplemente en la proporcionalidad entre el precio de la parcela y el valor de un índice. Como mejora de este método sintético en la literatura americana y europea también se había usado el análisis de regresión, relacionando ciertas variables explicativas (exógenas) con el precio de mercado (endógena) y estimando una función lineal a partir de los datos empíricos disponibles.

(*) Departamento de Economía Aplicada. Universidad de Almería.
(**) Departamento de Dirección y Gestión de Empresas. Universidad de Almería.
(***) Departamento de Métodos Cuantitativos para la Economía.

– Estudios Agrosociales y Pesqueros, n.º 185, 1999. (pp. 57-80).

Ballestero, E. (1973), dentro de la línea sintética describe el *método de las dos Betas* en la forma siguiente: «*La variable valor de mercado de un bien obedecerá estadísticamente a la función de distribución F. Por su parte, el índice, parámetro o variable explicativa obedecerá estadísticamente a otra función de distribución G. Suponemos que las funciones F y G tienen forma de campana o similar, entonces el método de las dos Betas establece una relación entre ambas variables*».

Para ello es preciso adoptar la siguiente hipótesis: Si el índice L_i de un activo F_i es mayor que el L_j de otro activo F_j, el valor de mercado V_i correspondiente al primer activo será también mayor que el valor de mercado V_j correspondiente al segundo. A partir de ello, conocida la distribución F del valor de mercado y la G del índice, el valor de mercado V_k correspondiente a un índice L_k se establece mediante la transformación:

$$V_k = \varnothing\,(L_K) \Leftrightarrow F(V_K) = G(L_K) \qquad [1]$$

La dificultad del método está en conocer la forma de la función Ø.

En su trabajo, Ballestero, E. (1973) advertía que para aplicar el *método de las dos Betas* es preciso disponer de unas tablas de la función de distribución de la Beta, y afirmaba literalmente: «*La aplicación práctica del método requiere la utilización de unas tablas que esperamos preparar en breve*».

La forma que adopten *F* y *G* van a determinar la dificultad que supone encontrar Ø, ya sea mediante tablas (como en el caso de la Beta) o analíticamente si suponemos otros casos.

Caballer, V. (1975) expone detalladamente un método y realiza una aplicación práctica mediante el uso de tablas estadísticas, supone para el índice G una Beta de parámetros:

$$p = h + \sqrt{2} \qquad q = h - \sqrt{2} \qquad [2]$$

con moda:

$$m = \frac{aq + bp}{p + q} \qquad [3]$$

y a partir de *a* (Valor Pesimista), *b* (Valor optimista) y *m* (Valor más probable), determina:

$$h = \frac{\sqrt{2}(b - a)}{2m - (a + b)} \qquad [4]$$

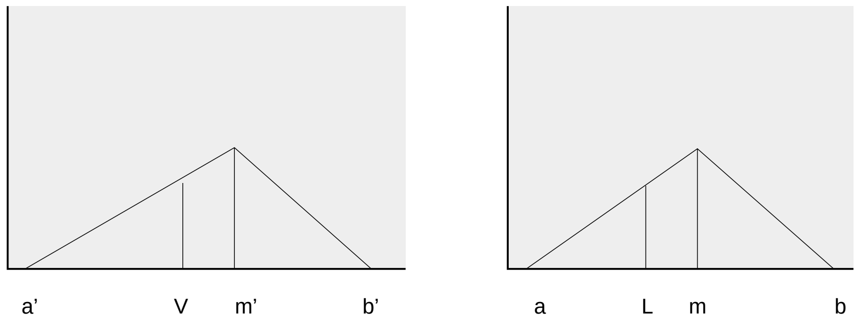
y de ahí calcula *p* y *q*; esto le permite ir a las tablas. Basta con repetir la operación con el valor (*F*).

El trabajo de Romero, C. (1977) extendiendo el caso de *las dos Betas* con el uso de otras funciones de distribución para *F* y *G* (Triangular y Uniforme), viene a resolver el problema de la utilización práctica, de tal modo que el propio autor de la idea original afirma (Ballestero 1991a, p. 337): «*El método de las dos Betas se llama también método de comparación de funciones de distribución*»; y en la misma obra, p. 338, sentencia que entre las distribuciones posibles de *F* y *G* las mejores son la Beta y la Triangular.

Romero, C. (1977) justifica el uso de la distribución triangular en lugar de la Beta, basándose en las siguientes razones:

a) Una distribución triangular está perfectamente determinada cuando se conoce la moda y los extremos, la Beta no (1).
b) Apoyándose en un trabajo de MacRimmon y Ryavec (1964), puede afirmarse que los errores cometidos al usar la distribución Beta son aproximadamente de la misma magnitud que los cometidos al usar la triangular.
c) El uso de la triangular permite obtener unas fórmulas que directamente nos dan el valor del activo a partir del valor del índice, si el valor del activo y el del índice son ambos menores que sus modas.

Figura 1

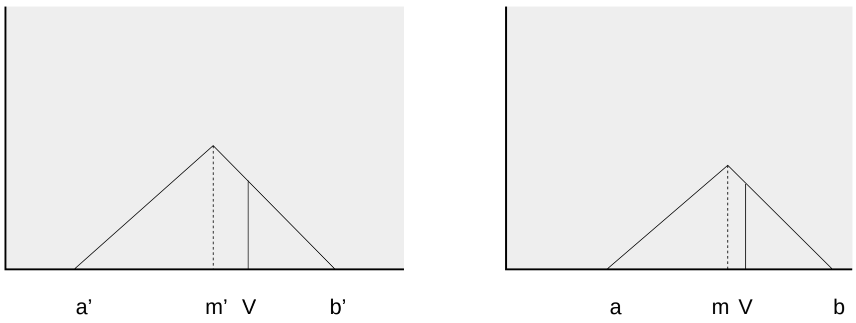


(1) *Evidentemente, el problema de PERT es que para determinar la Beta con los datos a, b, y m es necesario suponer que la varianza 1/36(b-a)2. Véase Figueras (1964), esta familia de betas, que es la del PERT clásico, no coincide necesariamente con la familia determinada por la restricción impuesta por Caballer, es decir, elegir p = h –$\sqrt{2}$ y q = h + $\sqrt{2}$.*

$$V_1 = a' + \frac{(L-a)\sqrt{(m'-a')(b'-a')}}{\sqrt{(m-a)(b-a)}} \qquad [5]$$

y cuando el valor del índice y del activo están ambos a la derecha de la moda

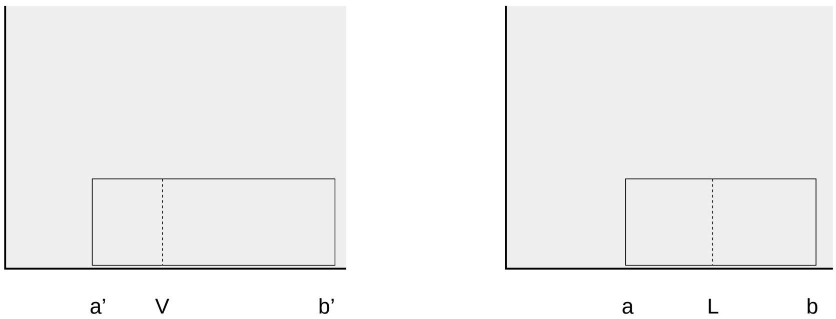
Figura 2



$$V = b' + \frac{(b-L)\sqrt{(b'-m')(b'-a')}}{\sqrt{(b-m)(b-a)}} \qquad [6]$$

Además, se estudia el caso en que ambas funciones de distribución son uniformes, muy útil cuando se dispone de pocos datos y no es posible estimar la moda, obteniéndose una relación:

Figura 3



$$V = L + \frac{(L-a)(b'-a')}{b-a} \qquad [7]$$

y el caso en el que el índice sigue una distribución triangular y el Valor de Mercado una Uniforme. Para establecer estas fórmulas de nuevo hay que distinguir si el Índice está a la izquierda o la derecha de su moda.

Ballestero, E. y Caballer, V. (1982) recogen en su trabajo todo el desarrollo mencionado anteriormente, y sobre lo que ellos llaman la variante del triángulo comentan la ventaja de disponer de una fórmula. Afirmando, como en el caso de la Beta, que no es necesario exigir la proporcionalidad del Índice del Mercado y del Valor del Activo. Desde entonces, este método de valoración sintética del activo ha aparecido en los libros de texto y en manuales de economía, entre otros el texto de Ballestero, E. (1991a), el de Caballer (1975), el de Caballer, V. (1994), y el de Ballestero, E. (1991b).

Existen aplicaciones prácticas del método, como la realizada por Alonso, R. y Lozano, J. (1985) utilizando datos de Díaz Berenguer et al. (1985), que proporcionan resultados satisfactorios en cuanto a la valoración de fincas; no obstante, este método se ha extendido a otras aplicaciones fuera del campo netamente agrícola. En el campo de la economía de la empresa podemos citar el trabajo de Romero, C. (1989), donde se aplica este método a la *Valoración de Acciones*.

El contenido del presente trabajo es el siguiente :

En el Apartado 2 se realizan una serie de críticas sobre la utilización de las distribuciones de probabilidad que habitualmente se han empleado en el *Método de las dos Funciones de Distribución*.

En el Apartado 3 se presenta un nuevo modelo probabilístico y se comentan las ventajas que su uso ofrece sobre los modelos anteriormente empleados.

En el Apartado 4 se desarrolla todo el aparato matemático que permite aplicar este nuevo modelo al *Método de las dos Funciones de Distribución*, obteniéndose expresiones fácilmente ejecutables mediante el uso de Hojas de Cálculo.

En el Apartado 5 se aplica el modelo al caso expuesto en Alonso y Lozano (1985), obteniéndose resultados satisfactorios.

Para concluir, en el Apartado 6 se comentan las conclusiones generales y las posibles líneas de investigación que se derivan de este trabajo.

2. ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LAS DISTRIBUCIONES EMPLEADAS

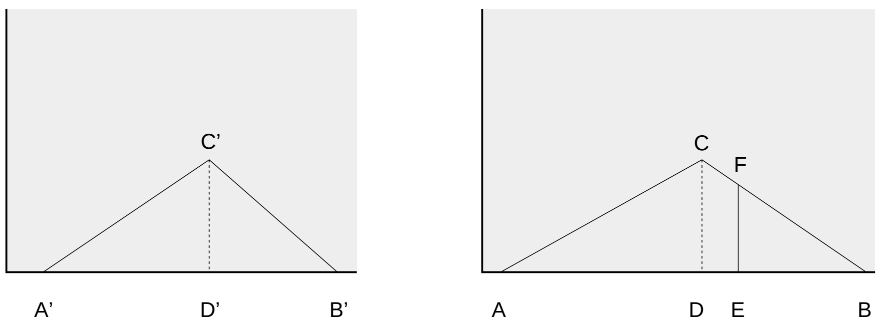
Se trata de plantear algunas observaciones respecto al uso de las funciones de distribución elegidas, no al método empleado.

En cuanto al uso de las distribuciones Beta, los mismos autores ya citados, Romero, Ballestero y Caballer, reconocen que no es posible determinar una sola Beta de entre todas las Betas Unimodales a partir de tres datos *a*, *b* y *m* por ser la Beta una distribución cuatriparamétrica (2). Por lo tanto, igual que en el PERT, hay que restringir la elección de la Beta a una subfamilia, o intentar obtener más información para poder ajustar a cada caso la distribución Beta correspondiente.

En cuanto a la distribución Triangular, se puede decir que las fórmulas obtenidas por Romero, C. (1977) exigen que tanto el valor del Índice como del activo cumplan la hipótesis de partida de estar situados en el mismo segmento de las respectivas modas, es decir, ambos han de estar en (*a*, *m*) y (*a*', *m*') respectivamente, o (*m*, *b*) y (*m*', *b*') respectivamente, ya que en el trabajo de Romero, C. (1977) no se contempla otra posibilidad. Sin embargo, como afirma el profesor Ballestero (3) (1991) «*ni el principio ni el razonamiento matemático obligan a que exista una correspondencia entre las modas respecto de las distribuciones estadísticas*», situación que, como podemos comprobar, podría darse.

Si nos fijamos en la siguiente figura:

Figura 4



(2) *Si todas las razones a favor de usar la Beta en el PERT se aplican a este caso (Ballestero, 1973), también podrán serles hechas todas las críticas que en ese momento recibió este método, críticas que son muy conocidas.*

(3) *Ballestero (1991).*Métodos Evaluatorios de Auditoría. *Capítulo 9, apartado 5.*

se puede ver que si el área del triángulo CDB es mayor que la de C'D'B' existirá un triángulo FEB cuya área es igual a la de C'D'B', y siempre que cojamos el valor del Índice en el interior del segmento DE (a la derecha de *m*) el correspondiente valor para el activo que cumpla la condición (1) estará forzosamente en el interior del segmento A´D' (a la izquierda de *m*'). Para este caso no podremos utilizar ninguna de las fórmulas propuestas por *Romero C. (1977)*, ya que él acepta de entrada que el valor del Índice y el del Activo deben estar situados en el mismo intervalo respecto a la moda. Es interesante comprobar que, para que esto se cumpla, es preciso imponer que el área del triángulo C'D'B' sea igual a la del formado por CDB, lo que implica:

$$\frac{b-m}{b-a}=\frac{b'-m'}{b'-a'} \qquad [8]$$

o lo que es equivalente, el área del triángulo A'C'D' sea igual a la del triángulo ACD, es decir:

$$\frac{m-a}{b-a}=\frac{b'-m'}{m'-a'} \qquad [9]$$

Si dividimos miembro a miembro (8) y (9) obtenemos que:

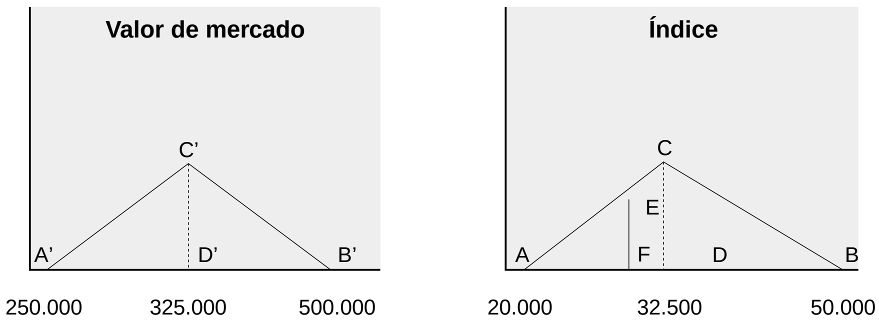
$$\frac{b-m}{m-a}=\frac{b'-m'}{m'-a'} \qquad [10]$$

La interpretación correcta de este resultado es que para explicar la variante del triángulo, tal y como la expone Romero, C. (1977), es preciso exigir la proporcionalidad entre los valores optimista, pesimista y modal del valor del Índice y del Activo como establece la relación [10], ya que en otro caso, como se ha puesto de manifiesto, no se podría aplicar la variante del triángulo de forma general.

La variante del triángulo ha sido aplicada sin problemas en diferentes trabajos, entre otros: Alonso y Lozano (1985); Guadalajara, N. (1996); Cañas, J. A., Domingo, J. y Martínez, J. A. (1994). Refiriéndonos al ejemplo que aparece en Alonso y Lozano (1985) (4), podemos comprobar que en los triángulos correspondientes al Valor de Mercado y al Índice no se cumple la igualdad entre las áreas, es decir:

(4) *Ver Alonso y Lozano (1985).*

Figura 5



El área de A'C'D' es igual a $\frac{18}{60}$, *mientras que la formada por ACD es* $\frac{25}{60}$. Podemos demostrar que el área del triángulo AEF, siendo es igual a la del triángulo formado por A'C'D', y por lo tanto la fórmula (3) de Romero (1977), no se podrá utilizar para valores comprendidos entre 30.606 y 32.500, puesto que de usarla obtendríamos:

V. Característico	Valor de Mercado	
	Alonso y Lozano	**Fórmula de Romero**
31.000	327.857	327.871
32.000	335.853	334.852

Los valores aportados por la fórmula de Romero no mantienen la igualdad entre las áreas. Los que sí la mantienen son los aportados por Alonso y Lozano, si bien estos últimos no señalan la fórmula que han usado.

El problema de la asimetría diferente de la variable valor de mercado y la variable explicativa se halla resuelto sistemáticamente en el texto de Caballer (1998), en el que se presentan cuatro fórmulas que contemplan las distintas posibilidades en que se pueden encontrar la variable explicativa y el valor de mercado respecto de sus modas, admitiendo que estén en posición similar o distinta respecto de ellas. No obstante, la aplicación de estas fórmulas requiere de antemano conocer estas posiciones.

En este trabajo se presenta un nuevo modelo probabilístico más flexible que el Triangular, para el que no sea necesario el uso de tablas, como en el caso de las Betas, y que de algún modo viene a mejorar los resultados obtenidos con los métodos anteriores.

3. MODELO PROBABILÍSTICO TRAPEZOIDAL. SU DETERMINACIÓN A PARTIR DE LAS TRES ESTIMACIONES CLÁSICAS : *a, b y m*

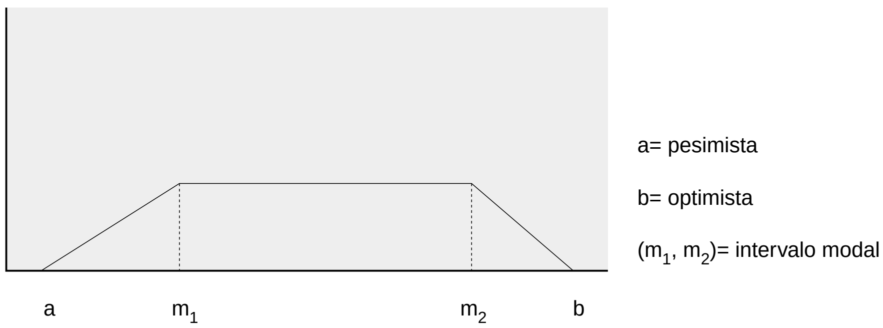
El modelo trapezoidal surge en el ámbito de las distribuciones aplicadas en el PERT: Beta, Triangular y Uniforme (5), como un híbrido entre la distribución Triangular y la Rectangular. En esta distribución se facilita la labor del supuesto experto, ya que puede situar la moda entre un intervalo m_1 y m_2.

Su función de densidad corresponde a la expresión:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{Si } x = a \\ \dfrac{2}{b-a+m_2-m_1}\cdot\dfrac{x-a}{m_1-a} & \text{Si } a \le x \le m_1 \\ \dfrac{2}{b-a+m_2-m_1} & \text{Si } m_1 \le x \le m_2 \\ \dfrac{2}{b-a+m_2-m_1}\cdot\dfrac{b-x}{b-m_2} & \text{Si } m_2 \le x \le b \\ 0 & \text{Si } x \ge b \end{cases} \qquad [11]$$

de cuya gráfica ha tomado el nombre:

Figura 6



(5) *Sobre este tema se pueden consultar los trabajos de Romero, C. (1991), Suárez (1990), o Herrerías, R., Miguel, S. (1989).*

Las características estocásticas de la distribución trapezoidal son (6):

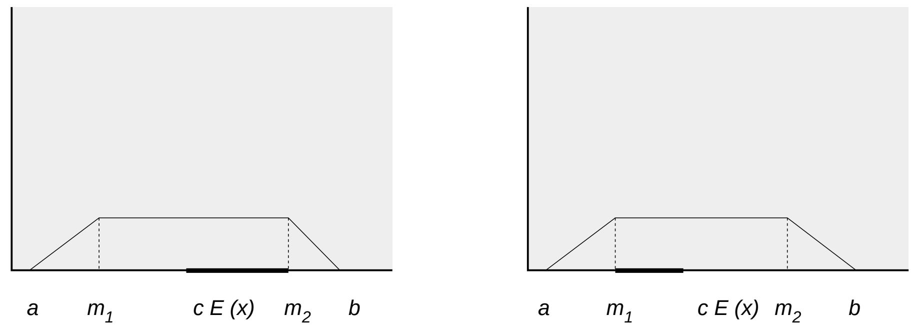
$$E[T] = \frac{1}{3}\left[a + m_1 + m_2 + b - \frac{bm_2 - am_1}{b - m_1 + m_2 - a}\right]$$
$$V[T] = \frac{1}{18}\left[\begin{array}{l}(b - m_1)^2(m_2 - a)^2 + (m_1 - a)(b - m_2) - \\ -\dfrac{2(b-a)(m_2 - m_1)(m_2 - a)(b - m_1)}{(b - m_1 + m_2 - a)^2}\end{array}\right] \qquad [12]$$

Es fácil ver que dicha distribución coincide con la uniforme si $a = m_1$ y $b = m_2$, o con la triangular si $m_1 = m_2 = m$.

Nos interesa resaltar un resultado que sobre este tipo de distribuciones han presentado Callejón, J., Pérez Rodríguez E. y Ramos, A. (1996), donde puede verse la siguiente demostración:

Teorema: Si $m_1 < c = \frac{a+b}{2} < m_2$, entonces la media de la distribución trapezoidal está en el intervalo (c, m_2) o bien en el intervalo (m_1, c), según sea la distancia entre c y m_2 mayor o menor, respectivamente, que la distancia entre m_1 y c.

Figura 7



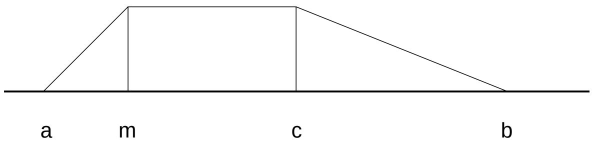
Atendiendo a este resultado y recordando que tanto en la distribución Triangular como en la Beta, en los casos de asimetría el valor esperado pertenece al intervalo determinado por el valor modal y el

(6) *Véase Herrerías, R. y Calvete, H. (1987).*

centro, o bien entre el centro y la moda, según sea ésta menor o mayor que aquél. Se propone la siguiente regla de actuación para obtener un modelo trapezoidal a partir de las tres estimaciones dadas por el experto (para el modelo Beta o Triangular).

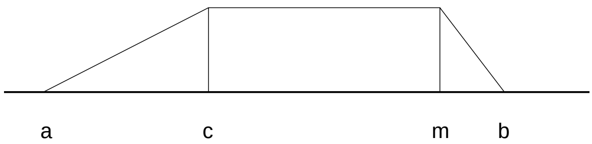
Para lo cual se tomará $m_1 = m$ y $m_2 = c$ en la asimetría derecha:

Figura 8



y $m_1 = m$ y $m_2 = m$ en la asimetría a la izquierda:

Figura 9



Si se comparan las estimaciones de la media y la varianza obtenidas por este método, con las obtenidas utilizando los modelos Beta y Triangular a partir de los mismos valores *a*, *b*, *m*, comparación que puede realizarse gráficamente estandarizando los valores a, b y m para que *a=0*, *b=1* y que *m* varíe entre ellos, se pueden obtener dos conclusiones de vital importancia para el objetivo de este trabajo.

1) La media proporcionada por el modelo trapezoidal CPR (1996) está más próxima al centro del intervalo que cualquiera de las otras dos. Es decir, este modelo proporciona una esperanza más centrada y es más moderado en sus estimaciones.
2) La varianza de la distribución Trapezoidal es muy parecida a la del modelo Triangular, si bien ligeramente superior cuando está

Gráfico 1

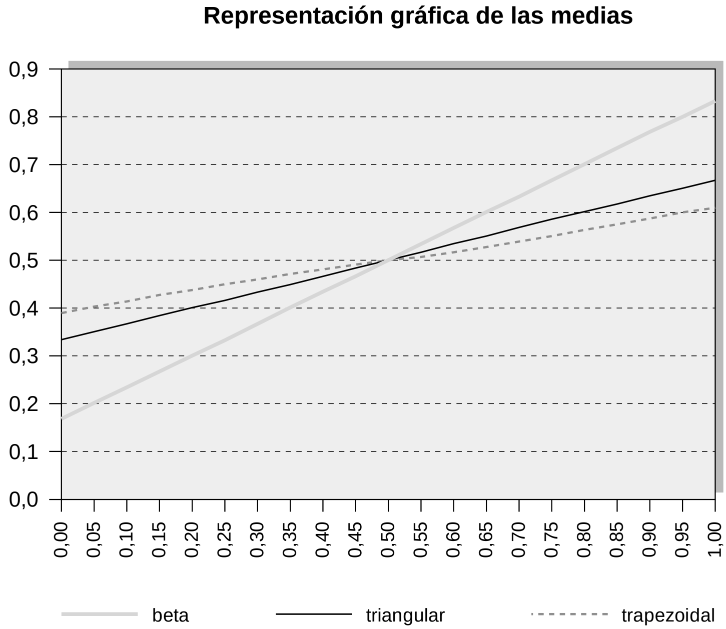
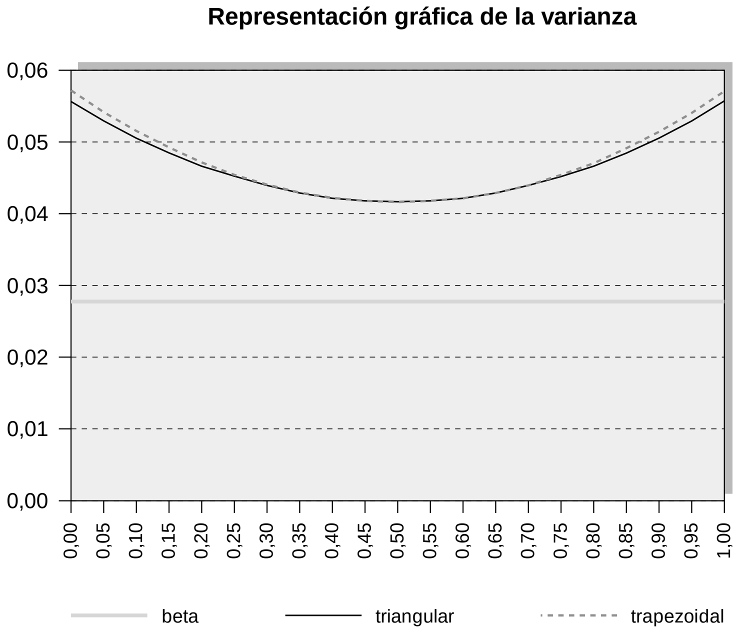


Gráfico 2



próxima a los extremos del intervalo y siempre mayor a la varianza de la Beta. Como se sabe (7), la varianza indica el riesgo de no acertar en la estimacion de la media, en la filosofía del PERT, la varianza expresa la incertidumbre y, por ello, no interesa minorarla, pues, si se hace, concluye con resultados finales más atrevidos.

En definitiva, el modelo trapezoidal CPR (1996) conducirá a resultados finales más moderados en media y más conservadores en varianza. Por esta razón se ha elegido este modelo probabilístico para una extensión del método de las dos betas.

En adelante, este modelo lo vamos a llamar CPR (96), que son las iniciales de Callejón, Pérez y Ramos, en el año de presentación del trabajo.

4. EL MODELO TRAPEZOIDAL CPR (96) Y EL MÉTODO DE LAS DOS DISTRIBUCIONES

Para obtener el valor del activo x’, conociendo tres estimaciones a’,b’ y c’ (menor, mayor y modal) a partir del valor conocido de un índice x y de tres estimaciones a, b, m del mismo (menor, mayor y modal), se elige como modelo probabilístico para ambos v. a.x’ y x, el modelo trapezoidal CPR (96). Además, se impone como condición inicial que en ambos casos el modelo tenga al misma simetría, es decir, ambos sean asimétricos a la derecha, figura 8 o asimétricos a la derecha, figura 9.

Esta hipótesis, que no es tan restrictiva como la que se ha visto que era necesaria para el modelo Triangular, encuentra su justificación en el siguiente razonamiento: *si la simetría del modelo Trapezoidal del índice es distinta a la del modelo Trapezoidal del valor del Activo o Valor del Mercado, entenderemos que ése no es un índice adecuado para este valor*. Como se ve, se trata de un primer test en el que se decide si se acepta o no el índice.

Dicho lo anterior, el problema queda planteado en los siguientes términos:

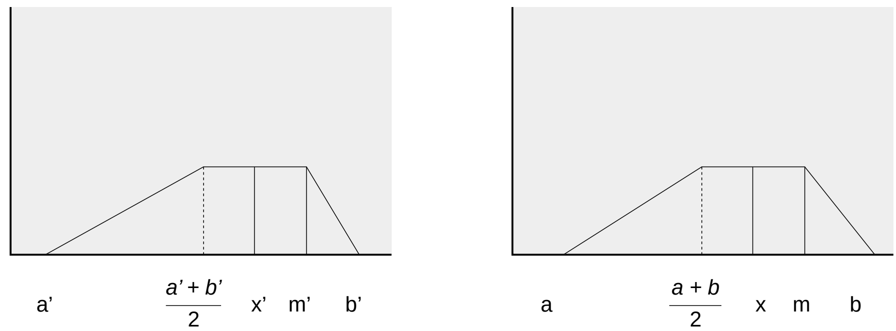
4.1. Asimetría a la izquierda

Dadas las dos distribuciones trapezoidales CPR (96) asimétricas a la izquierda.

---

(7) Véase Taha, H. A. (1981) y Herrerías, R. (1989).

Figura 9a



Se trata de hallar la transformación x' = Ø(x) que mantiene el área bajo la curva, es decir:

$$x' = \varnothing(x) \Leftrightarrow F_1(x) = F_2(x) \qquad [13]$$

$F_1(x)$ y $F_2(x')$ son las funciones de distribución respectivas:

$$F_1(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{(b-a)(b+2m-3a)}(x-a)^2 & \text{Si } x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \\ \dfrac{4x-3a-b}{b+2m-3a} & \text{Si } x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, m\right] \\ 1 - \dfrac{2(b-x)^2}{(b-m)(2m-3a+b)} & \text{Si } x \in [m, b] \end{cases} \qquad [14]$$

$$F_2(x') = \begin{cases} \dfrac{4}{(b'-a')(b'+2m'-3a')}(x'-a')^2 & \text{Si } x' \in \left[a', \dfrac{a'+b'}{2}\right] \\ \dfrac{4x-3a-b}{b+2m-3a} & \text{Si } x' \in \left[\dfrac{a'+b'}{2}, m'\right] \\ 1 - \dfrac{2(b'-x')^2}{(b'-m')(2m'-3a'+b')} & \text{Si } x' \in [m', b'] \end{cases} \qquad [15]$$

Se puede demostrar que el resultado y la regla de actuación serían:

Definición 1

Si llamamos:

$$S_1 = F_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{b-a}{b+2m-3a};\; S'_1 = F_2\left(\frac{a'+b'}{2}\right) = \frac{b'-a'}{b'+2m'-3a'}$$

$$\text{y } S_2 = F_1(m) = \frac{4m-3a-b}{2m-3a+b};\; S'_2 = F_2(m') = \frac{4m'-3a'-b}{2m'-3a'+b'},$$

$$K = \frac{b'+2m'-3a'}{b+2m-3a}$$

y en general S = $F_1(x)$ la transformación ø de la expresión [13] que se expresará como:

A) Si $S_1 > S'_1$

$$x' = \varnothing(x) = \begin{cases} a' + \sqrt{K\dfrac{b'-a'}{b-a}(x-a)} & 0 \le S \le S'_1 \\ \dfrac{3a'+b'}{4} + K\dfrac{(x-a)^2}{(b-a)} & S'_1 \le S \le S_1 \\ \dfrac{3a'+b}{4} + K\left(x - \dfrac{3a+b}{4}\right) & S_1 \le S \le S_2 \\ \dfrac{b'+m'}{2} - K\dfrac{(b-x)^2}{2(b-m)} & S_2 \le S \le S'_2 \\ b' - \sqrt{K\dfrac{b'-m'}{b-m}(b-x)} & S'_2 \le S \le 1 \end{cases} \qquad [16]$$

B) Si $S_1 < S'_1$ S = $F_1(x)$

$$x' = \varnothing(x) = \begin{cases} a' + \sqrt{K\dfrac{b'-a'}{b-a}}(x-a) & 0 \le S \le S_1 \\ a' + \sqrt{K(b'-a')(x - \dfrac{3a+b'}{4})} & 0 \le S \le S'_1 \\ \dfrac{3a'+b'}{4} + K\left(x - \dfrac{3a+b}{4}\right) & S'_1 \le S \le S'_2 \\ b' - \sqrt{2K(b'-m')\left(\dfrac{b+m}{2} - x\right)} & S'_2 \le S \le S_2 \\ b' - \sqrt{K\dfrac{b'-m'}{b-m}}(b-x) & S'_2 \le S \le 1 \end{cases} \qquad [17]$$

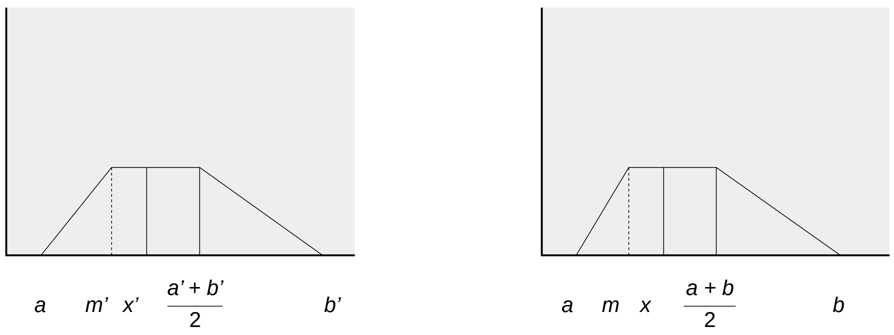
C) Si $S_1 = S'_1$

$$x' = \varnothing(x) = \begin{cases} a' + \sqrt{K\,\dfrac{b'-a'}{b-a}(x-a)} & 0 \le S \le S_1 \\ \dfrac{3a'+b}{4} + K\left(x - \dfrac{3a+b}{4}\right) & S_1 \le S \le S_2 \\ b' - \sqrt{K\,\dfrac{b'-m'}{b-m}(b-x)} & S'_2 \le S \le 1 \end{cases} \qquad [18]$$

4.2. Asimetría a la derecha

En el supuesto de que la moda esté a la izquierda de $\dfrac{a+b}{2}$, tendremos asimetría a la derecha.

Figura 10



Las funciones de distribución serían:
Para el índice:

$$F_1(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{m-a} \cdot \dfrac{2}{3b-2m-a} & \text{Si } x \in [a, m] \\ \dfrac{2x-a-m}{3b+2m-a} & \text{Si } x \in \left[m, \dfrac{a+b}{2}\right] \\ 1 - \dfrac{4(b-x)^2}{(b-a)(3b-2m-a)} & \text{Si } x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \end{cases} \qquad [19]$$

Para el valor del activo:

$$F_2(x')=\begin{cases}\dfrac{(x'-a')^2}{m'-a'}\cdot\dfrac{2}{3b'-2m'-a'} & \text{Si } x\in[a',m']\\ \dfrac{2x'-a'-m'}{3b'+2m'-a'} & \text{Si } x'\in\left[m',\dfrac{a'+b'}{2}\right]\\ 1-\dfrac{4(b-x)^2}{(b'-a')(3b'-2m'-a')} & \text{Si } x\in\left[\dfrac{a'+b'}{2},b'\right]\end{cases} \qquad [20]$$

Dando la siguiente definición:

Definición 2.

$$S_1=F_1(m)=\frac{2(m-a)}{3b-2m-a},\ S_2=F_1\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{2(b-m)}{3b-2m-a},$$
$$S_1'=F_2\left(\frac{a'+b'}{2}\right)=\frac{2(m'-a')}{3b'-2m'-a'}\ \ K=\frac{3b'-2m'-a}{3b-2m-a},$$
$$S_2'=\frac{2(b'-a')}{3b'-2m'-a'}\ \text{y } S=F_1(x)$$

Se puede demostrar que tendríamos los siguientes casos para la transformacion ø que cumple [13].

A) Si $S_1 > S'_1$

$$x'=\varnothing(x)=\begin{cases}a'+\sqrt{K\dfrac{(m-a')}{(m-a)}.(x-a)} & 0\le S\le S_1'\\ \dfrac{a'+b'}{2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{(x-a)^2}{m-a}.K & S_1'\le S\le S_1\\ \dfrac{1}{2}\left[(a'+m')+(2x-a-m)K\right] & S_1\le S\le S_2\\ \dfrac{3b'+a'}{4}-K\dfrac{(b-x)^2}{(b-a)} & S_2\le S\le S_2'\\ b'-\sqrt{K\dfrac{(b'-a')}{(b-a)}}(b-x) & S_2'\le S\le 1\end{cases} \qquad [21]$$

B) Si Si $S_1 > S'_1$ $\quad S = F_1(x)$

$$x' = \varnothing(x) = \begin{cases} a' + (x-a)\sqrt{K\dfrac{(m'-a')}{(m-a)}} & 0 \le S \le S'_1 \\ a' + \sqrt{(2x-a-m)(m'-a)K} & S'_1 \le S \le S_1 \\ \dfrac{1}{2}\left[(a'+m') + (2x-a-m)K\right] & S_1 \le S \le S'_2 \\ b' - \dfrac{1}{2}\sqrt{(3b+a-4x)(b'-a')K} & S'_2 \le S \le S_2 \\ b' - (b-x)\sqrt{\dfrac{(b'-a')}{(b-a)}K} & S_2 \le S \le 1 \end{cases} \qquad [22]$$

C) Si $S_1 = S'_1$

$$x' = \varnothing(x) = \begin{cases} a' + \sqrt{K\dfrac{(m'-a')}{(m-a)}(x-a)} & 0 \le S \le S_1 \\ \dfrac{1}{2}\left[(a'+m') + (2x-a-m)K\right] & S_1 \le S \le S_2 \\ b' - \sqrt{x\dfrac{b'-m'}{b-m}(b-x)} & S'_2 \le S \le 1 \end{cases} \qquad [23]$$

En definitiva, la regla que debemos seguir, en general, para obtener el valor del Activo o del Mercado x' cuando se conoce el valor del índice x, y siempre que se conozca de antemano a, b, m y a', b', m', es la siguiente:

$\frac{a'+b'}{2} < m'$ y $\frac{a+b}{2} < m$ $\longrightarrow$ Asimetría a la izquierda (Definición 1)

1) Calculamos S_1, S'_1, S_2, S'_2, K y S
2)
- $S_1 > S'_1$ utilizo (1.16)
- $S_1 < S'_1$ utilizo (1.17) para calcular x' a partir de x
- $S_1 = S'_1$ utilizo (1.18)

$\frac{a'+b'}{2} > m'$ y $\frac{a+b}{2} < m$ $\longrightarrow$ Índice incorrecto

$\frac{a'+b'}{2} < m'$ y $\frac{a+b}{2} > m$ $\longrightarrow$ Índice incorrecto

$\frac{a'+b'}{2} > m'$ y $\frac{a+b}{2} > m$ $\longrightarrow$ Asimetría a la derecha (Definición 2)

1) Calculamos S_1, S'_1, S_2, S'_2, K y S
2)
- $S_1 > S'_1$ utilizo (1.21)
- $S_1 < S'_1$ utilizo (1.22) para calcular x' a partir de x
- $S_1 = S'_1$ utilizo (1.23)

5. CASO PRÁCTICO

En relación al ejemplo ya señalado de Alonso y Lozano (1985), tenemos:

Para el Índice	**Para el Activo**
b: 50.000	b': 500.000
a: 20.000	a': 250.000
m: 32.500	m': 325.000
$\frac{a'+b}{2}$: 35.000	$\frac{a'+b'}{2}$: 375.000

Si utilizamos el Modelo Trapezoidal:

Indice	Valor de Mercado	Indice	Valor de Mercado
20.000	250.000	35.000	368.269,23
21.000	257.442	36.000	377.211,87
22.000	264.884,1	37.000	385.982,45
23.000	272.326,2	38.000	394.753,03
24.000	279.768,33	39.000	403.523,61
25.000	287.210,4	40.000	412.294,19
26.000	294.652,50	41.000	421.064,77
27.000	302.094,08	42.000	429.835,35
28.000	309.535,67	43.000	438.605,93
29.000	316.978,75	44.000	447.376,51
30.000	324.420,84	45.000	456.147,09
31.000	332.176,92	46.000	464.917,67
32.000	340.669,2	47.000	473.688,25
33.000	349.807,69	48.000	482.458,83
34.000	359.038,46	49.000	491.229,41
		50.000	500.000

Realizada la regresión obtenemos:

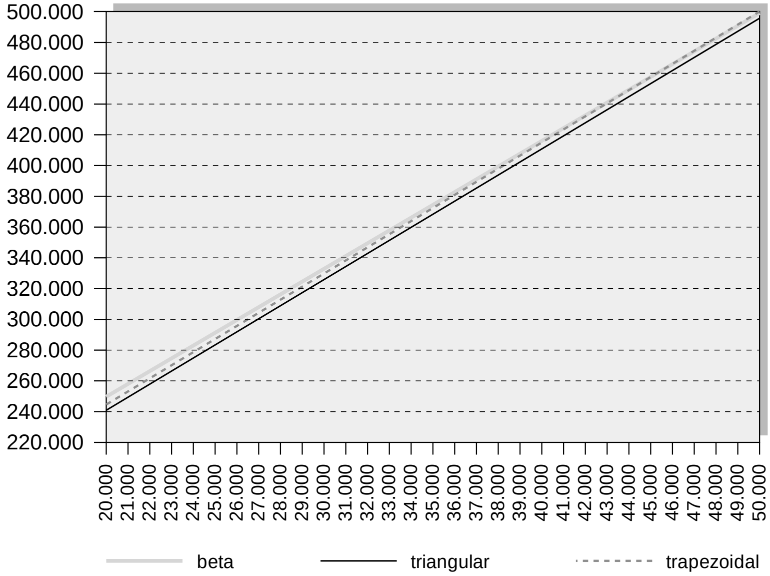
$Y_1 = 76549{,}556531080 + 8{,}432310829\ X_1 \qquad R^2 = 0{,}992$

donde Y_1 es el Valor del Activo o de Mercado y X_1 el Valor del índice.

6. CONCLUSIONES

Lo que en principio fue una mejora del método sintético en el ámbito de la valoración agraria, ha terminado por tomar cuerpo como un

Gráfico 3



método que en principio puede utilizarse siempre que se disponga de un Indice que pueda particularizarse para un Activo determinado. Este método será útil siempre que no se disponga de mucha información (8), e incluso podría utilizarse para realizar predicciones sobre la valoración de un Activo si se dispone de predicciones del Índice.

En este trabajo se ha puesto de manifiesto que el modelo CPR (96), más moderado en media y más conservador en varianza, es muy apropiado para el método de las dos funciones de distribución, ya que presenta las siguientes ventajas:

a) La única hipótesis inicial, es decir, que la asimetría del Indice y del valor del activo sean del mismo género, se puede considerar como un test previo respecto de la bondad del Indice, de modo que si no se da esta hipótesis desechamos la utilización del método, ya que el comportamiento estocástico del Indice y del valor del Activo no son similares.

b) No necesitamos tablas.

---

(8) *Ya que si se dispusiera de suficiente información se podrían usar otros métodos más precisos.*

c) La aplicación de las fórmulas desarrolladas en este trabajo es fácilmente incorporable a una hoja de cálculo, basta con introducir a, b, m, x, así como a', b', y m', para obtener rápidamente (9) x'.

Una posible línea alternativa a la expuesta en este trabajo podría consistir en tratar de ajustar una función de distribución más general recurriendo a Funciones Generadoras de Disfribución de Probabilidad y al uso de mayor información sobre el Índice y el Activo.

BIBLIOGRAFÍA

ALONSO, R. y LOZANO, J. (1985): «El método de las dos funciones de distribución: una aplicación a la valoración de fincas agrícolas en las comarcas Centro y Tierra de Campos (Valladolid)». *Anales del INIA, Economía,* 9: pp. 295-325. 1985

BALLESTERO, E. (1971): «Sobre la valoración sintética de tierras y un nuevo método aplicable a la concentración parcelaria». *Revista de Economía Política*. Abril, 1971: pp . 225-238.

BALLESTERO, E. (1973): «Nota sobre un nuevo método rápido de valoración». *Revista de Estudios Agrosociales,* 85, Octubre-Diciembre 1973: pp. 75-78.

BALLESTERO, E. (1991a): *Economía de la empresa agraria y alimentaria*. Ediciones Mundi-Prensa. Madrid.

BALLESTERO, E. y CABALLER, V. (1982). Il metodo delle due Beta. Un procedimento rapido nella stima dei beni fondiari. *Genio Rurale,* vol. 45 (6): pp. 33-36.

BALLESTERO, E. (1991b): *Métodos evaluatorios en Auditoría*. Alianza Universidad. Madrid 1991. Capítulo 9: pp. 192-203.

CALLEJÓN, J.; PÉREZ RODRÍGUEZ, E. y RAMO RODRÍGUEZ, A. (1996): La Distribución Trapezoidal como método probabilístico para la metodología PERT. *Estudios de Economía Aplicada X Reunión Asepelt-España*. Albacete (pendiente publicación)

CABALLER, V. (1975): *Concepto y Métodos de valoración agraria*. Ediciones Mundi-Prensa (1975). Madrid: pp. 447-467.

CABALLER, V. (1994): Métodos de valoración de empresas pp. 101-104.
Ediciones Pirámide S. A. Madrid.

Caballer, V. (1998). *Valoración Agraria. Teoría y Práctica*. Ediciones Mundi-Prensa. Madrid, 4ª Edición.

CAÑAS, J. A.; DOMINGO, J. y MARTÍNEZ, J. A. (1994): Valoración de tierras en las campiñas y la Subética de la provincia de Córdoba por el método de

(9) En un reciente proyecto de investigación sobre valoración de empresas que se ha llevado a cabo en la Universidad de Almería con la colaboración con la empresa Microdata Softaware S.L. se está desarrollando una aplicación informática de la variante del trapecio.

las funciones de distribución. *Investigación Agraria*. Serie Economía. Vol. 9 (3): pp. 447-467.

DÍAZ BERENGUER, E.; SUMPSI VIÑAS, J. M.; URBIOLA PÉREZ ESCOLAR, J. y VARELA ORTEGA, V. (1983). «El mercado y los precios de la tierra». *Papeles de Economía Española*, 16: pp. 169-181.

FIGUERAS, J.: PERT-CPM. Ed. Saeta.

GUADALAJARA, N. (1996): *Valoración Agraria. Casos Prácticos*. Ed. Mundi-Prensa. 2ª Edición.

HERRERÍAS, R. (1989): «Utilización de Modelos Probabilísticos Alternativos para el método PERT. Aplicación al Análisis de Inversiones». *Estudios de Economía Aplicada*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid: pp. 89-112.

HERRERÍAS, R. y CALVETE, H. (1987): *Una ley de Probabilidad para el estudio de los flujos de caja de una Inversión*: pp. 279-296. Libro Homenaje al profesor Gonzalo Arnaiz Vellando. INE. Madrid.

HERRERÍAS, R. y Miguel, S. (1989): «Expresiones Alternativas para la Varianza de la Distribución Trapezoidal». *Estudios de Economía Aplicada*. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de Valladolid: pp. 55-59.

MCCRIMMON, K. R. y RYAVEC, C. A. (1964): «An Analytical study of the Pert assumptions». *Operation Research*, vol. 12: pp. 16-37.

ROMERO, C. (1977): Valoración por el método de las dos distribuciones Beta: una extensión. *Revista de Economía Política*, 75: pp. 47-62. Madrid.

ROMERO, C. (1989): *Introducción a la financiación empresarial y al análisis de bursátil:* p. 90. Alianza. Madrid.

ROMERO, C. (1991): Técnicas de programación y control de proyectos. Ediciones Pirámide. Madrid.

SUÁREZ, A. (1980): *Decisiones óptimas de Inversión y Financiación en la Empresa*. Ediciones Pirámide. Madrid.

TAHA, H. A. (1982): *Investigación de Operaciones:* p. 374. Ed. Representaciones y Servicios de Ingeniería S. A. México.

RESUMEN

El método de dos funciones de distribución: la versión trapezoidal

Este artículo está centrado en la teoría general de valoración y, concretamente, en el método de las dos funciones de distribución, idea original de Ballestero (1971). En este trabajo, se hace un análisis de sus fundamentos y de las distintas distribuciones utilizadas en los diferentes trabajos publicados en estos últimos años. Además, se presenta una nueva función de distribución: la trapezoidal (CPR, 1996), y se justifican las ventajas de utilizar esta distribución, al tratarse de una función más moderada en media y más conservadora en varianza, por lo que sus resultados, como se pone de manifiesto en el caso práctico que se presenta, son más moderados que los obtenidos con las demás distribuciones, teniendo un mejor comportamiento para valores extremos, por lo que resulta la más adecuada para trabajar en ambientes de incertidumbre.

PALABRAS CLAVE: Valoración, método de las dos betas, distribución trapezoidal.

SUMMARY

The two-distribution-functions method: the trapezoidal version

This paper is focused on the general theory of valuation and, namely, on the two distribution functions method, that was an original idea of Ballestero (1971). In this work, he analyzes the foundations of this method and the different distributions used in several papers published in last years. Moreover, a new distribution function is presented: the trapezoidal one (CPR, 1996) and the advantages to use it, because this function is more moderate in mean and more conservative in variance, so, its results, as it can be seen in the practical case presented here, are more moderate than the obtained ones with the remaining distributions. Finally, they have a better behaviour for the extreme values and thus they turn out to be the most adequate to work in an uncertainty situation.

KEYWORDS: Valuation, two betas methods, trapezoidal distribution.