El Grupo de Brauer de Coálgebras Irreducibles

Juan Cuadra Díaz
Universidad de Almería
Dpto. Álgebra y Análisis Matemático
E-04120 Almería (España)
email: jcdiaz@ual.es

1 Introducción

La teoría de coálgebras y álgebras de Hopf ha acaparado la atención de gran parte de la comunidad matemática desde que Drinfel'd la relacionara con la física a través de los grupos cuánticos. Algunos invariantes para estas nuevas estructuras han sido propuestos en [2], [6], [13], [14]. Nosotros estamos interesados en el grupo de Brauer y de Picard de una coálgebra, que son construidos a partir de la teoría de Morita para coálgebras desarrollada en [12] y [5]. En esta comunicación exponemos los resultados obtenidos en [3] sobre el grupo de Brauer e intentamos dar una breve idea de los argumentos usados en la demostración de los mismos. El objetivo principal es estudiar qué equivalencias entre categorías de comódulos son inducidas por equivalencias sobre la categoría de módulos sobre las álgebras duales. La técnica para abordar este problema es considerar la categoría de comódulos como la clase pretorsión hereditaria asociada a la topología lineal de los ideales cofinitos y cerrados en las álgebras duales. El teorema 8 da una respuesta parcial a este problema. Como aplicación de este resultado resolvemos las preguntas formuladas en [13] sobre el grupo de Brauer. En concreto, probamos que para una coálgebra coconmutativa e irreducible C, el homomorfismo dualidad $(-)^* : Br(C) \to Br(C^*), [D] \mapsto [D^*]$ es inyectivo. Como consecuencia inmediata $Br(C)$ es un grupo torsión. También demostramos que el homomorfismo $i_* : Br(C) \to Br(C_0)$ inducido por la inclusión del corradical C_0 en C es inyectivo. Finalmente estudiamos algunas condiciones suficientes para que estas aplicaciones sean isomorfismos.

2 Notación y preliminares

Los libros de referencia básicos sobre coálgebras son [1] y [11]. Para la definición de álgebra de Azumaya, la construcción del grupo de Brauer de un anillo conmutativo, y sus propiedades referimos al lector a [7]. A lo largo de este artículo k denotará un cuerpo, todos los espacios vectoriales, álgebras, coálgebras, productos tensores, etc serán sobre k a menos que se diga otra cosa. La notación y los preliminares requeridos son los de [3]. Para una coálgebra C, la categoría de C-comódulos a derecha es denotada por $\mathcal{M}^C$. Dada un álgebra A, su categoría de módulos a izquierda se denota por ${}_A\mathcal{M}$.

Uno de los resultados importantes en la teoría de coálgebras es la caracterización de las equivalencias entre categorías de comódulos obtenida por M. Takeuchi en [12]. Éstas se caracterizan a través del producto cotensor, el funtor co-hom, y los comódulos quasi-finitos. Esta teoría de equivalencias para coálgebras, en cierto modo dual a la de Morita para anillos, es bastante diferente de aquella ya que requiere a menudo de las condiciones de finitud de la categoría de comódulos. También es menos manejable por la compleja definición del funtor co-hom y la coálgebra de co-endomorfismos. Existe otra aproximación, más intuitiva, dada por B. I-Peng Lin en [5] que estudia un tipo particular de equivalencias. Es bien conocido que la categoría de comódulos $\mathcal{M}^C$ se puede ver como una subcategoría plena de ${}_{C^*}\mathcal{M}$ a través de los módulos racionales. En [5] se estudian qué equivalencias entre las categorías de módulos inducen equivalencias entre las categorías de comódulos.

Se dice que $M \in \mathcal{M}^C$ es un *ingenerador* si es un cogenerador inyectivo finitamente cogenerado. Dos coálgebras C y D son llamadas *fuertemente equivalentes* si $\mathcal{M}^C$ es equivalente a $\mathcal{M}^D$ vía $f : \mathcal{M}^C \to \mathcal{M}^D$, $g : \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^C$, $f(C)$ es un ingenerador en $\mathcal{M}^D$ y $g(D)$ es un ingenerador en $\mathcal{M}^C$.

Teorema 1 [5, Th. 5] *Sean C y D coálgebras.*

a) Si C es fuertemente equivalente a D vía $f : \mathcal{M}^C \to \mathcal{M}^D$ y $g : \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^C$, entonces ${}_{C^*}\mathcal{M}$ es equivalente a ${}_{D^*}\mathcal{M}$ a través de los funtores

$$F(-) = {}_{D^*}P^*_{C^*} \otimes_{C^*} - : {}_{C^*}\mathcal{M} \to {}_{D^*}\mathcal{M},$$
$$G(-) = {}_{C^*}Q^*_{D^*} \otimes_{D^*} - : {}_{D^*}\mathcal{M} \to {}_{C^*}\mathcal{M}.$$

donde $P = g(D)$ y $Q = f(C)$. Además, f y g son naturalmente isomorfos a F y G respectivamente.

b) Si ${}_{C^*}\mathcal{M}$ es equivalente a ${}_{D^*}\mathcal{M}$ vía los funtores $F : {}_{C^*}\mathcal{M} \to {}_{D^*}\mathcal{M}$, $G : {}_{D^*}\mathcal{M} \to {}_{C^*}\mathcal{M}$ tal que $F(\mathcal{M}^C) \subseteq \mathcal{M}^D$ y $G(\mathcal{M}^D) \subseteq \mathcal{M}^C$, entonces C es fuertemente equivalente a D.

Es interesante estudiar qué equivalencias verifican la condición b), y por tanto, inducen una equivalencia fuerte entre las coálgebras. En [3] estudiamos algunas equivalencias que verifican esta propiedad. La idea clave para construir tales equivalencias es ver la categoría de comódulos $\mathcal{M}^C$ como la clase pretorsión hereditaria asociada a la topología lineal de los ideales cofinitos y cerrados en C^*. Por ello planteamos el problema en un ambiente más general con clases pretorsión hereditarias y topologías lineales.

3 Equivalencias y clases pretorsión hereditarias

Para la definición de topología lineal, clases pretorsión hereditarias, y demás nociones usadas en esta sección referimos al lector a [10].

Definición 2 *Sea R un anillo y $\mathcal{F}$ una topología lineal a izquierda sobre R. Se dice que $\mathcal{F}$ es simétrica si para cada $I \in \mathcal{F}$ existe un ideal bilátero J en R tal que $J \subset I$ y $J \in \mathcal{F}$.*

Proposición 3 *Sea R un anillo conmutativo y A una R-álgebra. Supongamos que $\mathcal{T}$ es una topología lineal sobre R, y $\mathcal{F}$ es una topología lineal simétrica sobre A. Entonces:*

i) La familia $\mathcal{T}A = \{J \leq {}_AA : IA \subseteq J \text{ para algún } I \in \mathcal{T}\}$ es una topología lineal simétrica sobre A.

ii) La familia $\mathcal{F} \cap R = \{J \leq R : I \cap R \subseteq J \text{ para algún ideal bilátero } I \in \mathcal{F}\}$ es una topología lineal sobre R.

Supongamos que A es una R-álgebra de Azumaya. Debido a la correspondencia biyectiva entre ideales biláteros de A e ideales de R, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4 *Si $\mathcal{T}$ es una topología lineal sobre R y $\mathcal{F}$ una topología lineal simétrica sobre A, entonces $\mathcal{T} = (\mathcal{T}A) \cap R$ y $\mathcal{F} = (\mathcal{F} \cap R)A$. Por tanto, existe una correspondencia biyectiva entre topologías lineales sobre R y topologías simétricas sobre A.*

Sean A, B dos R-algebras. Dados $M, N \in {}_A\mathcal{M}$, $Hom_A(M,N)$ es un R-módulo. Una una *equivalencia sobre* R, es una equivalencia, $F : {}_A\mathcal{M} \to {}_B\mathcal{M}$, verificando que el isomorfismo inducido $Hom_A(M,N) \to Hom_B(F(M), F(N))$ es R-lineal. Se dice que A y B son *equivalentes Morita sobre* R.

Teorema 5 *Sea $\mathcal{T}$ una topología lineal sobre R. Consideremos $\mathcal{C}_A$ and $\mathcal{C}_B$ las clases pretorsión hereditarias asociadas a las topologías inducidas $\mathcal{T}A, \mathcal{T}B$ sobre A y B respectivamente. Entonces, toda equivalencia sobre R entre ${}_A\mathcal{M}$ y ${}_B\mathcal{M}$ induce por restricción una equivalencia entre $\mathcal{C}_A$ y $\mathcal{C}_B$.*

Demostración: Sean $F : {}_A\mathcal{M} \to {}_B\mathcal{M}$ y $G : {}_B\mathcal{M} \to {}_A\mathcal{M}$ las equivalencias inversas sobre R. Por los teoremas de Morita, existen bimódulos ${}_BP_A$ y ${}_AQ_B$, centralizados por R, tal que $F(-) \cong {}_BP_A \otimes_A -, \quad y \quad G(-) \cong {}_AQ_B \otimes_B -$. Veamos que $F(\mathcal{C}_A) \subseteq \mathcal{C}_B$. Sea $M \in \mathcal{C}_A$ y $x \in F(M)$, entonces existen elementos $p_i \in P, m_i \in M$ tal que $x = \sum_{i=1}^n p_i \otimes m_i$. Como $M \in \mathcal{C}_A$, $Ann_A(m_i) \in \mathcal{T}A$ para todo $i = 1, ..., n$. Luego, $\cap_{i=1}^n Ann_A(m_i) \in \mathcal{T}A$. Sea I un ideal de R tal que $I \in \mathcal{T}$ e $IA \subseteq \cap_{i=1}^n Ann_A(m_i)$. Consideremos el ideal IB en B, y sea $y \in IB$. Entonces $y = \sum_{j=1}^m y_j b_j$ con $y_j \in I, b_j \in B$. Ahora,

$$\begin{aligned} y \cdot x &= (\textstyle\sum_{j=1}^m y_j b_j)(\sum_{i=1}^n p_i \otimes m_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j y_j p_i \otimes m_i \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j p_i y_j \otimes m_i = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j p_i \otimes y_j m_i = 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado que P está centralizado por R, que $y_j \in I \subseteq R$, y que $I \subseteq \cap_{i=1}^n Ann_A(m_i)$. Por tanto, $IB \subseteq Ann_B(x)$ y así $Ann_B(x) \in \mathcal{T}B$. Esto prueba que $F(\mathcal{C}_A) \subseteq \mathcal{C}_B$. Simétricamente se prueba que $G(\mathcal{C}_B) \subseteq \mathcal{C}_A$. Concluimos pues que $\mathcal{C}_A$ y $\mathcal{C}_B$ son equivalentes. ■

4 Aplicaciones a comódulos

Sea C una coálgebra y C^* su álgebra dual. Se dice que un ideal a izquierda I de C^* es *cofinito* si C^*/I es de dimensión finita, y *cerrado* si existe un espacio $W \subset C$ tal que $I = W^{\perp(C^*)}$. El conjunto de los ideales a izquierda de C^* cofinitos y cerrados, denotado por $\mathcal{F}_C$, es una topología lineal a izquierda sobre C^*. Considerando $\mathcal{M}^C$ embebido en ${}_{C^*}\mathcal{M}$ a través de los módulos racionales, tenemos que

$$\mathcal{M}^C = \{M \in {}_{C^*}\mathcal{M} : Ann_{C^*}(m) \in \mathcal{F}_C \ \forall m \in M\}.$$

Proposición 6 *$\mathcal{F}_C$ es una topología lineal simétrica.*

Demostración: Sea $I \in \mathcal{F}_C$, entonces existe un subespacio W de C de dimensión finita tal que $I = W^{\perp(C^*)}$. Sea E la subcoálgebra generada por W, que es de dimensión finita, en virtud del teorema fundamental de coálgebras. El espacio $J = E^{\perp(C^*)}$ es un ideal bilátero que pertenece a $\mathcal{F}_C$ y contenido en I. ■

Lema 7 *Sea C una coálgebra coconmutativa e irreducible, y D una C-coálgebra de Azumaya. Entonces $\mathcal{F}_C = \mathcal{F}_D \cap C^*$.*

En adelante, C siempre denotará una coálgebra coconmutativa. Sean D y E dos C-coálgebras equivalentes Morita-Takeuchi. Sea $F : \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^E$ uno de los funtores que da la equivalencia. Por el teorema de Takeuchi sabemos que F es representable como el producto cotensor por un cierto (D,E)-bicomódulo M. Diremos que F es una *equivalencia sobre* C si M es un bicomódulo sobre C. D y E serán llamadas coálgebras *equivalentes Morita-Takeuchi sobre* C.

Teorema 8 *Sea C una coálgebra coconmutativa e irreducible, y D, E dos C-coálgebras de Azumaya. Entonces, D^* y E^* son equivalentes Morita sobre C^* si y sólo si D y E son equivalentes Morita-Takeuchi sobre C.*

Demostración: (Esquema) Consideremos las topologías $\mathcal{F}_C, \mathcal{F}_D, \mathcal{F}_E$ sobre C^*, D^* y E^* respectivamente. Por la Proposición 6 sabemos que todas ellas son simétricas. Las clases pretorsión hereditarias asociadas a $\mathcal{F}_D$ y $\mathcal{F}_E$ son $\mathcal{M}^D$ y $\mathcal{M}^E$ respectivamente. Por el Lema 7, $\mathcal{F}_C = \mathcal{F}_D \cap C^* = \mathcal{F}_E \cap C^*$. Como C es irreducible, las álgebras duales D^* y E^* son álgebras de Azumaya sobre C^*, por [13, Prop. 4.10 (4)]. El corolario 4 establece que $\mathcal{F}_C D^* = (\mathcal{F}_D \cap C^*)D^* = \mathcal{F}_D$, y $\mathcal{F}_C E^* = (\mathcal{F}_E \cap C^*)E^* = \mathcal{F}_E$. Luego, las clases pretorsión hereditarias asociadas a $\mathcal{F}_C D^*$ y $\mathcal{F}_C E^*$ son $\mathcal{M}^D$ y $\mathcal{M}^E$ respectivamente. Si ${}_{D^*}\mathcal{M}$ y ${}_{E^*}\mathcal{M}$ son equivalentes Morita sobre C^*, el Teorema 5 nos dice que $\mathcal{M}^D$ y $\mathcal{M}^E$ son equivalentes. La segunda parte de la demostración, más técnica, consiste en demostrar que esta equivalencia es sobre C. ■

Es posible dar otra aplicación del Teorema 5 para obtener equivalencias entre las categorías de comódulos sobre coálgebras que sean duales finitos de álgebras. Sea A un álgebra, el dual finito de A,

$$A^0 = \{f \in A^* : Ker(f) \ contiene \ un \ ideal \ cofinito\},$$

es una coálgebra, [11, Prop. 6.0.2]. La categoría de comódulos $\mathcal{M}^{A^0}$ es isomorfa a la categoría de A-módulos a izquierda localmente finitos, [1, p. 125]. La topología lineal a izquierda sobre A asociada a $\mathcal{M}^{A^0}$ es la familia de todos los ideales a izquierda cofinitos de A, que denotaremos por $\mathcal{T}_A$.

Proposición 9 *$\mathcal{T}_A$ es una topología lineal simétrica.*

Teorema 10 *Sea R un álgebra conmutativa, y A, B dos R-álgebras de Azumaya. Si A y B son equivalentes Morita sobre R, entonces A^0 y B^0 son equivalentes Morita-Takeuchi.*

5 El grupo de Brauer de una coalgebra coconmutativa

Sea $B(C)$ el conjunto de clases de isomorfía de C-coálgebras de Azumaya. El *grupo de Brauer de C*, denotado por $Br(C)$, fue construido en [13] definiendo una relación de equivalencia en $B(C)$. Se dice que dos C-coálgebras $D, E \in B(C)$ son equivalentes, denotado por $E \sim D$, si D y E son equivalentes Morita-Takeuchi sobre C. El grupo cociente $Br(C) = B(C)/\sim$ es un grupo abeliano con la multiplicación inducida por el producto cotensor, $[D][E] = [D\square_C E]$, el elemento neutro es $[C]$, y el inverso de $[E]$ es $[E^{cop}]$. Una aplicación de coálgebras coconmutativas $\eta : C' \to C$ induce un homomorfismo de grupos $\eta_* : Br(C) \to Br(C')$ definido como $\eta_*([E]) = [E\square_C C']$ para todo $[E] \in Br(C)$.

Cuando C es de dimensión finita, $Br(C)$ es isomorfo al grupo de Brauer del álgebra dual mediante la aplicación dualidad $(-)^* : Br(C) \to Br(C^*), [D] \mapsto [D^*]$. Toda coálgebra coconmutativa C descompone como suma directa de subcoálgebras irreducibles, digamos $C = \oplus_{i\in I} C_i$. El grupo de Brauer verifica que $Br(C) \cong \prod_{i\in I} Br(C_i)$. De esta descomposición en producto tenemos las dos siguientes consecuencias:

1) A diferencia del grupo de Brauer de un anillo conmutativo, el grupo de Brauer de una coálgebra coconmutativa no es necesariamente un grupo torsión. Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los números racionales, y $C = \oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Q}$ la coálgebra group-like indizada en los números naturales. Entonces $Br(C) \cong \prod_{n\in\mathbb{N}} Br(\mathbb{Q})$. Éste no es un grupo torsión ya que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un elemento de orden n en $Br(\mathbb{Q})$.

2) Para calcular el grupo de Brauer de una coálgebra coconmutativa es suficiente calcular el grupo de Brauer de coálgebras coconmutativas irreducibles. Si C es una coálgebra de este tipo, entonces la aplicación dualidad $(-)^* : Br(C) \to Br(C^*), [D] \mapsto [D^*]$ es un homomorfismo de grupos.

Las siguientes preguntas quedaron abiertas en [13].

C1.- ¿Es el grupo de Brauer de una coálgebra coconmutativa irreducible un grupo torsión?

C2.- ¿Es la aplicación dualidad $(-)^* : Br(C) \to Br(C^*)$ inyectiva para cualquier coálgebra coconmutativa irreducible C?, ¿Cuándo es un isomorfismo?

C3.- *Problema de Auslander para coálgebras:* Sea C una coálgebra coconmutativa e irreducible y consideremos $i : C_0 \to C$ la inclusión del corradical en C. Entonces i induce un homomorfismo en los grupos de Brauer $i_* : Br(C) \to Br(C_0)$. ¿Es esta aplicación inyectiva?

Como aplicación del Teorema 8 podemos responder afirmativamente a la cuestión $C1$.

Teorema 11 *Para una coálgebra coconmutativa e irreducible C, el homomorfismo dualidad $(-)^* : Br(C) \to Br(C^*)$ es inyectivo.*

Demostración: Sean $[D], [E] \in Br(C)$ tal que $[D^*] = [E^*]$ en $Br(C^*)$. Entonces D^* y E^* son álgebras de Azumaya equivalentes Morita sobre C^*. El Teorema 8 nos da que D y E son equivalentes Morita-Takeuchi sobre C. Por tanto, $[D] = [E]$ en $Br(C)$. ■

Como el grupo de Brauer de un anillo conmutativo es siempre un grupo torsión ([7, Th. 12.9]), obtenemos:

Corolario 12 *El grupo de Brauer de una coálgebra coconmutativa e irreducible es un grupo torsión.*

Usando el Teorema 11, también se puede dar una respuesta afirmativa a la pregunta $C3$. Los ingredientes fundamentales para demostrar esto, además del anterior teorema, son que las álgebras duales de coálgebras tienen la propiedad de levantamiento de idempotentes, y el siguiente lema.

Lema 13 [4, Lem. 1] *Sea R un anillo conmutativo local con ideal maximal J y A una R-álgebra de Azumaya. Supongamos que se pueden levantar idempotentes de A/JA a A. Si $A \otimes_R R/J \cong M_n(R)$, entonces $A \cong M_m(R)$.*

Lema 14 [8, Prop. 2.2.2] *Sea E una coálgebra y D una subcoálgebra tal que $E_0 \subseteq D$. Si $\bar{e}^*$ es un idempotente en $E^*/D^\perp$, entonces existe un idempotente $e^* \in E^*$ tal que e se aplica en $\bar{e}^*$ mediante la proyección canónica.*

Teorema 15 *Sea C una coálgebra coconmutativa e irreducible con corradical C_0. El homomorfismo $i_* : Br(C) \to Br(C_0)$, inducido por la inclusión $i : C_0 \to C$, es inyectivo.*

Demostración: (Esquema) El algebra dual C^* es local ya que C es irreducible. Su radical de Jacobson es $J = C_0^{\perp(C^*)}$. La proyección canónica $p : C^* \to C^*/J$ se identifica con la aplicación dual de la inclusión $i : C_0 \to C$ ya que $C^*/J \cong C_0^*$. La proyección p induce un homomorfismo en los grupos de Brauer $p_* : Br(C^*) \to Br(C^*/J), [A] \mapsto [A \otimes_{C^*} C^*/J]$. Tenemos entonces un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Br(C) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(-)^*"'] & Br(C_0) \arrow[d, "(-)^*"] \\ Br(C^*) \arrow[r, "p_*"] & Br(C_0{}^*) \end{tikzcd} \qquad (1)$$

Mostramos que la composición $p_* \circ (-)^*$ es inyectiva. Sea $[E] \in Br(C)$ tal que $(p_* \circ (-)^*)([E]) = [C_0^*]$ en $Br(C_0^*)$. Entonces, $E^* \otimes_{C^*} C_0^* \cong M_n(C_0^*)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por [13, Prop. 4.10, Cor. 3.17], el corradical de E, E_0, es isomorfo a $E \Box_C C_0$. El radical de Jacobson de E^* coincide entonces con $E_0^{\perp(E^*)}$, y

$$E^*/E_0^{\perp(E^*)} \cong E_0^* \cong (E \Box_C C_0)^* \cong E^* \otimes_{C^*} C_0^* \cong M_n(C_0^*).$$

La Proposición 14 establece que los idempotentes pueden ser levantados de $E^*/E_0^{\perp(E^*)}$ a E. Luego, $E^* \cong M_m(C^*)$ para algún $m \in \mathbb{N}$ por la Proposición 13. Esto es, $[E^*] = [C^*]$ en $Br(C^*)$. Por la inyectividad de $(-)^*$ (Teorema 11), $[E] = [C]$ en $Br(C)$. Finalmente, de la conmutatividad de (1), concluimos que i_* es injectiva. ■

En [3] damos algunas condiciones necesarias bajo las cuales los homomorfismos $i_* : Br(C) \to Br(C_0)$ y $(-)^* : Br(C) \to Br(C^*)$ son isomorfismos.

Teorema 16 *Sea C una coálgebra coconmutativa e irreducible con corradical C_0. En cualquiera de los siguientes casos:*
i) C_0 separable,
ii) C conexa, i.e., $C_0 \cong k$, o
iii) C correflexiva,
el homomorfismo $i_* : Br(C) \to Br(C_0)$ es un isomorfismo.

De la descomposición en producto del grupo de Brauer de cualquier coálgebra coconmutativa, y utilizando el anterior teorema en cada componente, podemos calcular algunos ejemplos.

Ejemplos:

1.- El grupo de Brauer de una coálgebra coconmutativa sobre el cuerpo de los números reales es isomorfo un producto directo de $\mathbb{Z}_2$.

2.- El grupo de Brauer de una coálgebra coconmutativa sobre un cuerpo finito o álgebraicamente cerrado es trivial.

3.- Si C es una coálgebra coconmutativa conexa. Entonces $Br(C) \cong Br(k)$. En particular, el grupo de Brauer del álgebra universal envolvente de un álgebra de Lie es isomorfo al grupo de Brauer del cuerpo base.

Teorema 17 *Sea C una coálgebra coconmutativa e irreducible con corradical separable. Bajo cualquiera de las siguientes hipótesis:*
i) C^* henseliano (esto ocurre, si C es correflexiva), o
ii) $J = Rad(C^*)$ es un nil-ideal (en particular, nilpotente),
el homomorfismo $(-)^* : Br(C) \to Br(C^*)$ es un isomorfismo. En este caso, $Br(C_0) \cong Br(C) \cong Br(C^*) \cong Br(C_0^*)$.

La condición que $Rad(C^*)$ sea nilpotente es equivalente a que C tenga filtración corradical finita. Además, si el cuerpo base es de característica cero, entonces $Rad(C^*)$ es nilpotente si y sólo si es un nil-ideal, [9, Prop. 3.4].

Referencias

[1] E. Abe, *Hopf Algebras.* Cambridge University Press, 1977.

[2] S. Caenepeel, F. Van Oystaeyen, y Y.H. Zhag, *The Brauer Group of Yetter-Drinfeld Module Algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **349** No. 9 (1997), 3737-3771.

[3] J. Cuadra, J.R. García Rozas, B. Torrecillas, y F. Van Oystaeyen, *The Brauer Group of Irreducible Coalgebras.* Aparecerá en J. Algebra, 2001.

[4] F. DeMeyer, *The Brauer Group of a Polynomial Ring.* Pacific J. Math. **59** (1975), 391-398.

[5] B. I-Peng Lin, *Morita's Theorem for Coalgebras.* Comm. Algebra **1** No. 4 (1974), 311-344.

[6] W.D. Nichols y M.B. Richmond, *The Grothendieck Group of a Hopf Algebra.* J. Pure Appl. Algebra **106** (1996), 297-306.

[7] M. Orzech y C. Small, *The Brauer group of a Commutative Ring.* Lectures Notes in Pure and Applied Mathematics **11**, Marcel Dekker Inc., 1975.

[8] D.E. Radford, *On the Structure of Ideals of the Dual Algebra of a Coalgebra.* Trans. Amer. Math. Soc. **198** (1974), 123-137.

[9] D.E. Radford, *Coalgebraic Coalgebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **45** No. 1 (1974), 11-18.

[10] B. Stentrön, *Rings of Quotients.* Springer-Verlag, 1975.

[11] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras.* Benjamin, 1969.

[12] M. Takeuchi, *Morita Theorems for Categories of Comodules.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **24** (1977), 629-644.

[13] B. Torrecillas, F. Van Oystaeyen, y Y.H. Zhang, *The Brauer Group of a Cocommutative Coalgebra.* J. Algebra **177** (1995), 536-568.

[14] B. Torrecillas y Y.H. Zhang, *The Picard Groups of Coalgebras.* Comm. Algebra **24** No. 7 (1996), 2235-2247.