Universidad de Almería
Facultad de Ciencias Experimentales
Departamento de Álgebra y Análisis Matemático

Teoremas de existencia para operadores elípticos no lineales

Tesis Doctoral

José Carmona Tapia

Almería, 2001

Universidad de Almería
Facultad de Ciencias Experimentales
Departamento de Álgebra y Análisis Matemático

Teoremas de existencia para operadores elípticos no lineales

Tesis Doctoral

José Carmona Tapia

Almería, 2001

Tesis doctoral dirigida por el Doctor D. David Arcoya Álvarez, Profesor del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada, defendida por D. José Carmona Tapia el día 12 de enero de 2001, ante el tribunal formado por los profesores: D. Lucio Boccardo (Presidente), D. Ireneo Peral Alonso, D. Antonio Cañada Villar, Enrique Fernández Cara (Vocales) y D. Antonioi Jiménez Vargas (Secretario). Obtuvo la calificación de Sobresaliente "cum laude"por unanimidad.

A Ángeles

Índice General.

Notación.

$\emptyset$ conjunto vacio

$\mathbb{N}$ conjunto de los números naturales.

$\mathbb{R}$ conjunto de los números reales.

$s^+ \equiv \text{máx}\{s, 0\}, s^- \equiv \text{mín}\{s, 0\}$, con $s \in \mathbb{R}$.

Ω conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^N$.

χ_B función característica del conjunto $B \subset \mathbb{R}^N$.

$|\Omega|$, meas Ω medida de Lebesgue del subconjunto Ω de $\mathbb{R}^N$.

a.e. casi por doquier.

$\xi \cdot \zeta$ producto escalar usual de los vectores ξ, ζ de $\mathbb{R}^N$.

$\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$ gradiente de $u : \Omega \to \mathbb{R}$.

div $u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u_N}{\partial x_N}$ divergencia de $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$.

$\dfrac{\partial u}{\partial n}(x)$ derivada de $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ en la dirección normal exterior en el punto $x \in \partial\Omega$.

∂A frontera de un subconjunto de un espacio topológico.

$\overline{A}$, cl$\{A\}$ cierre de un subconjunto de un espacio topológico.

$B_R(0)$ bola abierta de un espacio normado, de radio $R > 0$ y centro cero.

dist(A, B) distancia entre A y B, conjuntos compactos de un espacio métrico.

$\rightharpoonup$ convergencia débil en un espacio de Banach.

$L^r(\Omega)$ $1 \leq r \leq \infty$ espacio de Lebesgue usual con norma $\|u\|_r$.

$H^1_0(\Omega)$ espacio de Sobolev con la norma $\|u\| = \|\nabla u\|_2$.

2^* exponente crítico de Sobolev ($2^* = \frac{2N}{N-2}$ si $N > 2$ y $2^* = \infty$ si $N \leq 2$).

$H^{-1}(\Omega)$ es el espacio dual de $H^1(\Omega)$.

$W^{1,p}_0(\Omega)$ espacios de Sobolev usuales, dotados de su norma usual.

$C_0(\overline{\Omega})$ espacio de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ que se anulan en $\partial\Omega$, dotado con la norma $\|u\|_0 = \sup_\Omega |u|$.

$C^k_0(\overline{\Omega})$ espacio usual de funciones continuas y diferenciables, dotado de su norma usual.

$\overset{\circ}{P}$ interior del cono en $C^1_0(\overline{\Omega})$ de funciones no negativas.

I matriz identidad, operador identidad.

$M \leq 0$ (respect. $M \geq 0$) la forma cuadrática inducida por la matriz M es definida no positiva (respect. no negativa).

$\deg(\Phi, A, a)$ grado de Leray-Schauder de $\Phi : E \to E$ en el abierto $A \subset E$ respecto a $a \in \Phi(E) \setminus \Phi(\partial A)$.

$\mathrm{i}(\Phi, u_0)$ índice de la solución aislada u_0 de la ecuación $\Phi(u) = 0$.

$\mathrm{Proy}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{R}$ proyeción del espacio producto $\mathbb{R} \times E$ sobre $\mathbb{R}$.

Introducción.

En la interacción constante y recíproca entre las Matemáticas y el resto de las Ciencias es de especial importancia el campo de las ecuaciones diferenciales y es inmensa, desde cualquier perspectiva, la cantidad de problemas que pueden plantearse. En la presente Memoria pretendemos contribuir al estudio de una clase particular de *problemas de contorno elípticos casi-lineales* empleando técnicas de *Análisis Funcional No Lineal*. Al mismo tiempo que probamos nuevos resultados surgen nuevas cuestiones, la mayoría está siendo aún objeto de nuestro estudio y no todas ellas tendrán cabida en esta Memoria.

Con el fin de plantear dichos problemas consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto acotado con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular y sea $A(x,s) := (a_{ij}(x,s))$, $i,j = 1,\ldots,N$ una matriz cuadrada simétrica de tamaño N, cuyos coeficientes $a_{ij} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sean funciones de Carathéodory, esto es

$$a_{ij}(x,s) \text{ es medible respecto a } x \text{ para cada } s \in \mathbb{R},$$
$$a_{ij}(x,s) \text{ es continua en } s \text{ a.e. } x \in \Omega.$$

En ese caso, para cada función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ medible en Ω, la función dada por $x \to a_{ij}(x,u(x))$ es también medible. (Para un estudio detallado de las principales propiedades de los operadores de Nemytskii así definidos véase por ejemplo [**12, 55, 76**]).

Supongamos además que existen dos constantes positivas α y β satisfaciendo, para cada $(s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ y a.e. $x\in\Omega$, que

$$|A(x,s)| \leq \beta, \tag{A_1}$$

$$A(x,s)\xi\cdot\xi \geq \alpha|\xi|^2. \tag{A_2}$$

Gracias a la condición (A_1) podemos considerar el operador Q definido en $H_0^1(\Omega)$ como

$$Qu = -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u),\ \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Además, (A_1) garantiza que, para cada $w \in H_0^1(\Omega)$, los coeficientes de la matriz $A(x,w)$ sean acotados, es decir, $a_{ij}(x,w) \in L^\infty(\Omega)$. La hipótesis (A_2) es una condición de elipticidad sobre el operador Q. Hemos de hacer notar también que Q es monótono si, y solamente si la matriz A no depende de la variable s (véase [**38**]).

Trataremos en esta Memoria diferentes problemas no lineales que involucran al operador Q, es decir, dada una función de Carathéodory $f(x,s)$ consideraremos el problema de contorno con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera

$$\left.\begin{array}{rcll} Qu &=& f(x,u), & x\in\Omega,\\ u &=& 0, & x\ \in\partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{0.1}$$

y lo estudiaremos para distintos tipos de funciones f. Destacamos explícitamente el carácter casi-lineal de la ecuación (0.1). De hecho (0.1) es un problema semi-lineal si, y sólo si $A(x,s)$ es independiente de s. Por analogía con el caso semi-lineal ($A(x,s) = A(x)$), de ahora en adelante seguiremos refiriéndonos al término f como *no-linealidad de la ecuación.*

En el caso semi-lineal, dependiendo del comportamiento de la no-linealidad f, el problema (0.1) ha sido estudiado extensivamente usando *métodos variacionales*, *métodos de sub y super-solución* y *técnicas de bifurcación*. Podemos citar varios libros y surveys donde aparecen desarrolladas todas estas técnicas [**4, 5, 17, 44, 54, 55, 60, 90, 91, 92**]. Sin embargo, si la matriz $A(x,s)$ depende de s, el problema (0.1) no tiene, en general, estructura variacional y no es posible usar herramientas variacionales directamente. Las técnicas basadas en sub- y super-soluciones han sido aplicadas para el estudio de (0.1) en [**33**].

Parece, al menos para nuestro conocimiento, que la teoría de bifurcación no ha sido usada anteriormente para estudiar (0.1) en el caso de no-linealidades f dependientes de un parámetro. Una de las principales dificultades técnicas para aplicar este método funcional consiste en la no-linealidad del operador diferencial considerado, $-\text{div}(A(x,u)\nabla u)$. De hecho, este operador no es, en general, *ni homogéneo ni diferenciable*. Recordemos que la homogeneidad del operador diferencial subyacente es esencial para aplicar las técnicas de bifurcación tanto en el caso semi-lineal, (véase [**10**]), como en sus extensiones casi-lineales [**8, 9**] para operadores homogéneos como el p-Laplaciano $\Delta_p \equiv \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Aquí, nosotros evitamos la falta de homogeneidad tomando convenientes funciones test. Así mostramos como se puede usar teoría de bifurcación para mejorar los resultados obtenidos con anterioridad para el problema (0.1) ofreciendo además un análisis más completo del conjunto de soluciones y permitiendo contemplar no-linealidades más generales.

El primer capítulo de la Memoria lo dedicaremos a describir desde el punto de vista general del *Análisis Funcional No Lineal* el método de sub y super-soluciones así como distintos métodos para la obtención de *continuos* (conjuntos conexos y cerrados) de soluciones de ecuaciones funcionales dependientes de un parámetro. Una introducción al Grado

Topológico de Leray-Schauder será de utilidad a fin de fijar la notación y propiedades fundamentales que usaremos a lo largo de la Memoria. Recordaremos así mismo algunos de los resultados principales de la Teoría de Bifurcación. Concluiremos el capítulo con la prueba de la existencia de continuos de soluciones sin bifurcación, destacamos por su novedad los Teoremas 1.9 y 1.10.

En el Capítulo II consideraremos ya el problema (0.1) y precisaremos el concepto de solución del mismo. Probaremos además la existencia, monotonía y compacidad del operador inverso de Q, lo cual permitirá presentarlo como un problema en el ambiente general del Capítulo I. Para ello es necesario probar un Teorema de Comparación que permita su extensión al caso de matrices A generales. En [**33**] (véase también [**32**]), Artola y Boccardo prueban dicho teorema imponiendo además de (A_{1-2}), la existencia de una función de Osgood $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, esto es,

$$\omega \text{ no decreciente}, \ \omega(0) = 0, \int_{0^+} \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty$$

tal que

$$|A(x,s) - A(x,t)| \leq \omega(|s-t|), \quad \forall\, s,\, t \in \mathbb{R}. \tag{A_3}$$

Incluimos aquí la prueba por conveniencia del lector. En muchas situaciones es interesante plantearse la existencia de *solución positiva* para (0.1). Para el estudio posterior realizado en el Capítulo V, concluiremos el capítulo probando que, modificando convenientemente la no-linealidad el problema de la existencia de solución positiva de (0.1) es equivalente al de existencia de solución del problema modificado.

En el Capítulo III recogemos los principales resultados de Bifurcación de soluciones positivas desde infinito y desde la solución trivial que hemos obtenido para este tipo de operadores casi-lineales (Teoremas 3.4 y 3.9). Para ello, consideraremos el problema (0.1) inmerso en un problema uniparamétrico, es decir, la no-linealidad dependiente de un parámetro, y estudiaremos el problema,

$$\left.\begin{array}{rcll} Qu & = & f(\lambda, x, u), & x \in \Omega\ , \\ u & = & 0, & x\ \in \partial\Omega\ , \end{array}\right\} \qquad (P_\lambda)$$

donde $f : \mathbb{R} \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es ahora una función de Carathéodory, de manera que para algún $r > N/2$, para cada conjunto acotado Λ de $\mathbb{R}$ y para cada $s_0 > 0$ existe una función positiva $C(x)$ en $L^r(\Omega)$ tal que

$$|f(\lambda, x, s)| \le C(x), \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall\,\lambda\, \in\, \Lambda,\ \forall\, s\, \in\, [0, s_0]. \qquad (\tilde{f}_1)$$

Conviene recordar que en el caso semi-lineal, la sucesión divergente formada por los *valores propios* del operador diferencial lineal $-\mathrm{div}(A(x)\nabla u)$ juega un papel crucial en el estudio de la existencia de solución, bajo las condiciones apropiadas sobre la no-linealidad. En efecto, la naturaleza y dificultad de los problemas depende en gran medida de la relación entre dichos valores propios y el comportamiento asintótico de la no-linealidad. En el caso de matrices $A(x, s)$ generales, es decir, para el operador no lineal Q no podemos hablar de una sucesión de valores propios. No obstante, en el estudio de la bifurcación desde infinito que realizamos en el Capítulo III veremos que, si la matriz A verifica a.e. $x \in \Omega$

$$\lim_{|s|\to\infty} A(x, s) = A_\infty(x), \qquad (A_4)$$

de nuevo, es determinante la inter-relación entre el comportamiento asintótico de la no-linealidad y los valores propios $\{\lambda_k\}$ del siguiente problema de valores propios

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A_\infty(x)\nabla u) & = & \mu u & x \in \Omega, \\ u & = & 0 & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{0.2}$$

De una forma totalmente análoga, estudiaremos también la bifurcaión desde cero de soluciones positivas, siendo en este caso relevante la interacción del comportamiento local de la no-linealidad para $u = 0$ y el conjunto de los valores propios del problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,0)\nabla u) & = & \mu u & x \in \Omega, \\ u & = & 0 & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

Continuaremos poniendo de manifiesto esta conexión en el desarrollo del Capítulo IV. En el caso semi-lineal es conocido, desde el trabajo de Dolph [**62**], la *existencia de solución en el caso de no interacción entre el comportamiento asintótico de la no-linealidad y el conjunto de valores propios* (véase también [**55, 71, 84**]). Por nuestra parte, para cada $\mu \notin \{\lambda_k \,/\, k \in \mathbb{N}\}$, probaremos (Teorema 4.1) la *existencia de solución* del problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) & = & \mu u + g(x,u), & x \in \Omega, \\ u & = & 0 & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{0.3}$$

donde $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory satisfaciendo

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{g(x,s)}{s} = 0, \quad \text{uniformemente en } \Omega.$$

El siguiente problema donde se revela el papel de la sucesión $\{\lambda_k\}$ es el de existencia de solución de (0.3) en el caso que $\mu = \lambda_1$. Este tipo de problemas *resonantes en infinito* ha sido extensivamente estudiado en el caso semi-lineal. Entre otros podemos citar [**1, 11, 12, 19, 20, 24, 34, 45, 72, 74, 77, 85**]. Respecto el caso casi-lineal cabe destacar los trabajos [**16, 47, 48, 49, 74**] para operadores similares a los considerados por nosotros, así como [**6, 15, 28, 39**] para el operador *p-Laplaciano*. En el reciente trabajo de Arcoya-Gámez [**26**], se introduce la novedad de estudiar los fenómenos resonantes a partir de condiciones que determinan el lado en el que ocurre toda posible bifurcación desde (λ_1, ∞). Necesariamente dichas condiciones implican la existencia de una cota *a priori* para soluciones en el lado donde no ocurre la bifurcación. Esta cota *a priori* es lo único necesario (véase [**72**]) para probar la existencia de solución del problema resonante usando argumentos de compacidad. En el Teorema 4.2 usamos este punto de vista junto con los resultados de bifurcación obtenidos en el Capítulo III, para obtener *existencia de solución del problema resonante* bajo unas condiciones menos restrictivas que aquellas impuestas por Chabrowski en [**48**]. Concretamente, eliminamos la siguiente condición sobre los coeficientes de la matriz A

$$\lim_{|s|\to\infty} \nabla_x a_{ij}(x,s) = \nabla a_\infty^{ij}(x),$$

donde $a_\infty^{ij}(x)$ denota los coeficientes de la matriz $A_\infty(x)$. Más aún, en [**48**] el autor impone que $\lambda_1 = \Lambda_1$, donde

$$\Lambda_1 = \inf\{\lambda_1(w) : \; w \in L^2(\Omega)\},$$

y $\lambda_1(w)$ denota el primer valor propio asociado al problema de autovalores

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,w)\nabla u) & = & \mu u & \quad x \in \Omega, \\ u & = & 0 & \quad x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Nosotros sustituimos esta condición, por otra sobre el carácter de la matriz $[A(x,s) - A_\infty(x)]$, pudiendo contemplar así casos en los que $\lambda_1 \neq \Lambda_1$.

Ambrosetti y Prodi estudian en [**13**] para el caso semi-lineal otro tipo de interacción de la no-linealidad con el primer valor propio del operador lineal (Laplaciano). Concretamente, entre otras condiciones más, su hipótesis básica es la siguiente

$$\lim_{s\to-\infty} f'(s) = f'(-\infty) < \lambda_1 < f'(+\infty) = \lim_{s\to+\infty} f'(s) < \lambda_2;$$

es decir, la derivada de la no-linealidad *salta* (*jumps*, en inglés) el primer valor propio.

A partir de este trabajo, problemas como el anterior, donde *la no-linealidad tiene derivada que salta uno o varios de los valores propios* del operador lineal, han sido exhaustivamente estudiados en el caso semi-lineal. Podemos citar por ejemplo [**3, 17, 29, 30, 35, 36, 50, 52, 55, 58, 64, 65, 73, 74, 78, 79, 86, 94**]. Sin embargo, para el caso de operadores casi-lineales la literatura no es tan amplia, quizás debido a la aparente dificultad en obtener resultados de multiplicidad de soluciones. En este ambiente consideramos el problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) &=& f(x,u)+t\varphi & x\in\Omega, \\ u &=& 0 & x\in\partial\Omega, \end{array}\right\} \qquad (Q_t)$$

donde $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ es una función positiva y f es una función de Carathéodory para la que existen funciones positivas $c_1(x), c_2(x)$, $f'_{\pm\infty}(x)$ en $L^r(\Omega)$ $(r > N/2)$ tales que

$$|f(x,s)| \le c_1(x)|s| + c_2(x), \quad \text{a.e. } x\in\Omega,\ \forall\, s\in\mathbb{R}, \qquad (f_1)$$

$$\lim_{s\to\pm\infty} \frac{f(x,s)}{s} = f'_{\pm\infty}(x), \quad \text{uniformemente en } x\in\Omega. \qquad (f_2)$$

Además de (f_{1-2}), supondremos que existen constantes reales positivas c_+, c_-, c tales que a.e. $x \in \Omega$

$$-\infty < f'_{-\infty}(x) < c_+ < \lambda_1 < c_- < f'_{+\infty}(x) < c < \lambda_2. \qquad (f_3)$$

Para este tipo de operadores casi-lineales cabe destacar [**48**]. En este trabajo Chabrowski necesita imponer una condición más fuerte que (f_3). Concretamente se considera

$$-\infty < f'_{-\infty}(x) < c_+ < \Lambda_1 \leq \Lambda_2 < c_- < f'_{+\infty}(x), \tag{0.4}$$

siendo

$$\Lambda_2 = \sup\{\lambda_1(w) :\ w \in L^2(\Omega)\}.$$

Es decir, la interacción debe ser con el primer valor propio de toda una clase de operadores lineales. Por contraposición, con esta condición más restrictiva es posible estudiar el caso en que no se verifique (A_4). El autor obtiene (con una demostración cuanto menos *escabrosa*) un resultado similar al caso semi-lineal con la *existencia de* $t^*, t_* \in \mathbb{R}$ *tal que* (Q_t) *no tiene ninguna solución para* $t > t^*$*, tiene al menos una solución para* $t = t^*$ *y al menos dos soluciones para* $t < t_*$. Lefton-Shapiro en [**80**] intentan abarcar una familia de operadores más generales, permitiendo la dependencia de la matriz A respecto del gradiente ∇u de u (con ciertas restricciones que excluyen por ejemplo el caso del operador p-Laplaciano), pero no obtienen resultados de multiplicidad de soluciones.

Por nuestra parte, con la hipótesis (f_3) (menos restrictiva que (0.4)), recuperamos en la tercera sección del Capítulo IV el resultado de Chabrowski (Teorema 4.7). Más aún, podemos mejorarlo (para una clase particular de matrices $A(x,s)$) probando que $t^* = t_*$ (Teorema 4.11). Este resultado se obtiene como consecuencia de la *existencia, para cada* $t < t^*$*, de un continuo* C *contenido en*

$$\Sigma \equiv \{(t,u) \in \mathbb{R} \times E :\ u \textit{ es solución de } (Q_t)\},$$

de manera que $C_{t'} \equiv \{u \in E : (t', u) \in C\}$ *contiene dos soluciones distintas de* $(Q_{t'})$ *para cada* $t' \in [t, t^*]$. La existencia de este continuo en forma de $\supset$ de soluciones parece ser desconocido incluso en el caso semi-lineal. Podemos extender (Teorema 4.12) también este resultado al caso en que la no-linealidad f *inter-actúe con todos los autovalores de* (0.2). Concretamente al caso que f satisfaga

$$-\infty < f'_{-\infty}(x) < c_+ < \alpha\mu^{(1)} < f'_{+\infty}(x) \equiv +\infty, \quad \forall x \in \Omega, \qquad (f'_3)$$

junto con una condición de crecimiento subcrítico, o sea que para algún $p \in (1, 2^* - 1)$ se tenga

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s^p} = h(x) > c > 0, \quad \text{uniformemente en } x \in \Omega. \qquad (f_4)$$

En el Capítulo V, usando los resultados de los anteriores, estudiamos la existencia de solución positiva para distintos tipos de no-linealidades. Entre los resultados conocidos a este respecto, cabe destacar [**33**], donde el método de sub y super-solución se usa para matrices A generales y algunas clases particulares de no-linealidades f. Específicamente se consideran la función cóncava $f_1(\lambda, x, s) = \lambda s^q$, con $0 < q < 1$, y la función cóncavo-convexa $f_2(\lambda, x, s) = \lambda s^q + s^p$, con $0 < q < 1 < p$. Su resultado es relativo a *la existencia de, al menos, una solución positiva para cada* λ *positivo en el caso* $f = f_1$; mientras que, si $f = f_2$, *encuentran un número positivo* λ^* *de manera que el problema* (P_λ) *tiene al menos una solución positiva para cada* $\lambda \in (0, \lambda^*)$. Al contrario que en el caso semi-lineal (véase [**43**] para la unicidad y [**7, 27, 40, 67**] para la multiplicidad), la cuestión de la *unicidad de solución positiva para* $f = f_1$ y de *multiplicidad para*

[(1)] μ denota al primer valor propio del operador Laplaciano con condiciones de Dirichlet cero en la frontera

$f = f_2$ *y* $p < (N+2)/(N-2)$ permanecía abierta. Hemos de mencionar también que este tipo de no-linealidades ha sido estudiado en [**18**] para operadores casi-lineales variacionales, usando, en este caso, técnicas de puntos críticos de funcionales no diferenciables.

Por nuestra parte, además de generalizar los resultados de [**10**] para operadores casi-lineales de la forma $-\text{div}(A(x,u)\nabla u)$ y funciones f asintóticamente lineales, en cero o en infinito (Teorema 5.1), mejoramos [**33**]. Específicamente, en el caso $f = f_1$ mejoramos el resultado de existencia de [**33**] al deducir ésta como consecuencia de la *existencia de un continuo en* $\mathbb{R} \times C_0(\overline{\Omega})$ *de parejas* (λ, u)*, con* u *solución positiva de* (P_λ)*, "emanando"de* $(0,0)$ *cuya proyección sobre el eje de* λ *contiene al intervalo* $(0, +\infty)$ (Teorema 5.4). Además, bajo hipótesis convenientes sobre la matriz $A(x,s)$, también probaremos un *resultado de unicidad*, Teorema 5.7, que extiende al ambiente casi-lineal los resultados de [**43**]. Si $f = f_2$ y $p < (N+2)/(N-2)$ $(N > 2)$ mejoramos los resultados de [**33**] mostrando que *existen* $\overline{\lambda}$, Λ^* *con* $0 < \overline{\lambda} \leq \Lambda^*$ *tal que el problema* (P_λ) *tiene al menos dos soluciones positivas para cada* $0 < \lambda < \overline{\lambda}$ *y no tiene soluciones positivas para* $\lambda > \Lambda^*$ (véase Teorema 5.9). De hecho, encontramos Λ^* como una estima *a priori* sobre el parámetro λ y probamos la *existencia de un continuo* Σ_0 *de soluciones positivas partiendo de* $u = 0$ *en* $\lambda = 0$ *que retorna en algún* $\lambda = \overline{\lambda}$ *para alcanzar de nuevo* $\lambda = 0$ (véase Figura 6). Más aún todavía, para una clase particular de matrices del tipo $A(x,s) = A(x)a(s)$ también probamos, Teorema 5.12, que $\overline{\lambda} = \Lambda^*$, es decir, *la proyección de* Σ_0 *en el eje de* λ *contiene a* $(0, \Lambda^*]$*, el intervalo maximal de* λ*'s positivos para los cuales existe al menos solución positiva de* (P_λ). Hemos de notar que esta propiedad de maximalidad del continuo de soluciones parece ser desconocida incluso en el caso semi-lineal. Los resultados anteriores extienden al ambiente casi-lineal algunos de los obtenidos en [**7**] para ecuaciones semi-lineales.

Cerramos este capítulo considerando la extensión al marco casi-lineal del resultado clásico de Ambrosetti-Rabinowitz sobre la *existencia de solución positiva no trivial del problema*

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f(x,u), & x \in \Omega, \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

supuesto que f satisfaga (f_3'), (f_4) y $f(x,0) = 0$. Recordemos que los autores usan para ello su famoso *Teorema de Paso de Montaña*, es decir, una técnica variacional no extendible a nuestros operadores diferenciales. Nuestra idea con respecto a este problema será mostrar la conexión existente con el aparentemente totalmente distinto marco del problema de Ambrosetti-Prodi estudiado en el capítulo previo. Así, en el Teorema 5.13 extenderemos al caso casi-lineal el resultado anterior como un simple corolario del Teorema 4.8.

Al final de los Capítulos III, IV y V, hemos incluido una sección de comentarios finales en la que pretendemos analizar las posibles direcciones en las que podríamos completar los resultados obtenidos en ese capítulo.

Finalmente, hemos incluido también unas Notas Finales, en las que describimos de manera detallada algunos problemas que surgen de manera natural y que constituyen posibles líneas de investigación futuras.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mi más profundo agradecimiento al Prof. David Arcoya Álvarez, sin cuya dirección hubiera sido imposible la realización de este trabajo. Deseo significar la gran admiración que le profeso, su constante estímulo, paciencia, orientación y enseñanzas a lo largo de innumerables sesiones de trabajo ha afectado no sólo a mi formación matemática y a mi labor investigadora, también a nivel personal he quedado marcado por su gran calidad humana.

Deseo agradecerle además su supervisión durante las tres estancias que he realizado (becado por la Junta de Andalucía, Universidad de Almería y M.E.C. PB98-1283) en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada al que expreso mi gratitud por su extraordinaria acogida.

A las instituciones, Comunidad Europea, Junta de Andalucía, Universidad de Almería, que han permitido mi asistencia a los cursos *Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, second and third school* organizados en el Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italia.

A los Prof. Antonio Cañada Villar y José Luis Gámez Ruiz, de La Universidad de Granada, así como al Prof. Ireneo Peral Alonso, de la Universidad Autónoma de Madrid, por los cursos avanzados que han impartido en la Universidad de Almería y que han contribuido a mi formación específica en muchas de las técnicas desarrolladas en esta Memoria.

Al Prof. Salvador Villegas Barranco, de la Universidad de Granada, y Benedetta Pellacci, de la Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, SISSA/ISAS. Con ellos he disfrutado de múltiples reuniones de trabajo, su disponibilidad y experiencia me han proporcionado gran ilusión para continuar mi trabajo de investigación.

Al Prof. Lucio Boccardo, de la Universidad de Roma I, por su reciente estancia en la Universidad de Almería, las continuas sesiones de trabajo con él me han aportado una nueva visión de algunos problemas y provocado mi interés por otros muchos.

A todos mis compañeros del Departamento de Álgebra y Análisis Matemático de la Universidad de Almería, por haberme proporcionado todos los medios que han facilitado la realización de este trabajo. En especial quisiera agradecer a la Prof. Agripina Rubio Flores bajo cuya tutela inicié mi interés por la investigación en matemáticas.

Capítulo I

Existencia de puntos fijos para operadores compactos. Métodos abstractos.

I.1. Método de Sub y Super-Soluciones.

A lo largo del presente capítulo estudiamos algunos resultados sobre la existencia de puntos fijos de una aplicación compacta de un espacio de Banach X en él mismo. Recordemos que una aplicación $T : X \to X$ es compacta cuando sea continua y transforme conjuntos acotados en relativamente compactos.

Consideremos el problema de existencia de solución, $x \in X$, de la ecuación de puntos fijos de T

$$x - Tx = 0. \tag{1.1}$$

Sobre el estudio de esta ecuación abstracta se pueden plantear gran diversidad de problemas como el de existencia de solución, unicidad, multiplicidad, etc. Bajo ciertas condiciones sobre la aplicación T, es posible encontrar una demostración constructiva de la existencia de solución para ella.

Algunos conceptos básicos utilizados en la presente Memoria los enunciamos en las siguientes definiciones.

DEFINICIONES 1.1. *Sea* $(X, \leq)$ *un espacio de Banach ordenado por un cono,* K. *Consideremos la aplicación* $T : X \to X$, *decimos que*

(1) K *es normal si* $\inf\{|x + y| : x, y \in K \cap \partial B_1(0)\} > 0$.

(2) T *es monótono creciente si* $Tx \leq Ty$ *para cada* $x, y \in X$ *con* $x \leq y$,

(3) $x \in X$ *es sub-solución del problema* (1.1) *si* $x \leq Tx$. *Análogamente* $y \in X$ *es super-solución de* (1.1) *si* $Ty \leq y$.

El siguiente resultado relaciona la existencia de puntos fijos de un operador compacto y monótono con la existencia de sub y super-soluciones convenientemente ordenadas.

Teorema 1.2 (Método de sub y super-solución). *Dado un espacio de Banach X ordenado por un cono $K \subset X$ normal, consideremos un operador compacto y monótono, $T : X \to X$. Supongamos además que existen $\underline{x}, \overline{x} \in X$ respectivamente sub y super-solución para* (1.1) *con $\underline{x} \leq \overline{x}$. Entonces existe una solución $x \in X$ de* (1.1) *con $\underline{x} \leq x \leq \overline{x}$.*

Idea de la demostración. Sean $x_n, y_n \in X$ las sucesiones definidas por

$$x_n = T^{n-1}(\underline{x})^{(1)},\ y_n = T^{n-1}(\overline{x}),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $\underline{x} \leq T(\underline{x})$ (es sub-solución) y T es monótona creciente, se tiene que $T(\underline{x}) \leq T^2(\underline{x})$, es decir

$$\underline{x} = x_1 \leq x_2 = T(\underline{x}) \leq T^2(\underline{x}) = x_3.$$

Así, razonando recursivamente, se deduce que x_n es una sucesión creciente (análogamente y_n es decreciente). Además, la normalidad de K implica que ambas sean acotadas (véase [**60**]). La compacidad de T supone ahora la convergencia de ambas sucesiones. La prueba concluye observando que el límite de cualquiera de ellas ha de ser un punto fijo de T. (Para más detalles véase [**2**]). □

Nota 1.3. El teorema anterior se puede obtener como un sencillo corolario del Teorema del Punto Fijo de Schauder: "*Sea X un espacio de Banach, $O \subset X$ un conjunto cerrado, convexo y acotado y $T : O \to O$ un operador compacto. Entonces* (1.1) *tiene al menos una solución en O*"(véase [**82**]). Basta para ello considerar el conjunto cerrado y convexo (y acotado por la normalidad de K) definido por $O = \{x \in X : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$. La monotonía de T implica que $T(O) \subset O$. Estamos pues en condición de aplicar el Teorema de

(1) $T^0 \equiv I$ (operador identidad)

Schauder a $T : O \to O$ obteniendo así lo deseado. Por el contrario, esta prueba no ofrece información acerca de como encontrar dicha solución.

De la prueba del Teorema 1.2 se puede deducir además la existencia en O de una solución minimal y otra maximal para (1.1), es decir, si x_n, y_n vienen dadas como en la prueba del Teorema 1.2, y dados $x, y \in X$ con $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, entonces cualquier solución z de (1.1) con $z \in O$ debe verificar que $x \leq z \leq y$.

I.2. Continuos de soluciones.

En esta sección consideramos el problema (1.1) inmerso en un problema uniparamétrico y estudiamos la existencia de continuos de soluciones. Previamente expondremos las principales propiedades del grado topológico, así como una breve introducción a la teoría de bifurcación.

I.2.1. Introducción al Grado Topológico de Leray-Schauder. Sea X un espacio de Banach real, $\Omega \subset X$ abierto y acotado, $T : \overline{\Omega} \to X$ compacta e $y \in X$ tal que $y \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Denotaremos por $\deg(I - T, \Omega, y)$ al grado topológico de Leray-Schauder relativo a T, Ω e y. Recordemos que el grado topológico se caracteriza (véase [**82**]) por verificar las siguientes propiedades:

- (d_1) *Normalización.* $\deg(I, \Omega, y) = 1$, $\forall y \in \Omega$,
- (d_2) *Aditividad.* $\deg(I - T, \Omega, y) = \deg(I - T, \Omega_1, y) + \deg(I - T, \Omega_2, y)$, para cada par de subconjuntos abiertos y disjuntos $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ de manera que $y \notin (I - T)(\overline{\Omega}/(\Omega_1 \cup \Omega_2))$,
- (d_3) *Invariancia por homotopías.* $\deg(I - H(t, \cdot), \Omega, y(t))$ es constante para aplicaciones $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \to X$ compacta e $y : [0, 1] \to X$ continua tales que $y(t) \notin (I - H(t, \cdot))(\partial\Omega)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Adicionalmente, a partir de las anteriores se pueden probar las siguientes propiedades del grado topológico de Leray-Schauder

(d_4) $\deg(I-T,\emptyset,y)=0$, $\forall y\in X$,

(d_5) si $\deg(I-T,\Omega,y)\neq 0$ entonces $y\in(I-T)(\Omega)$,

(d_6) Sea $O\subset\mathbb{R}\times X$ abierto y acotado, $H:\overline{O}\to X$ compacta e $y\in X$ tal que $y\notin H(\partial O)$. Para cada $\lambda\in\mathbb{R}$ definimos $O_\lambda=\{x\in X:(\lambda,x)\in O\}$ y $H_\lambda:\overline{O}_\lambda\to\mathbb{R}$ dada por $H_\lambda(x)=H(\lambda,x)$. Entonces, el grado topológico $\deg(I-H_\lambda,O_\lambda,y)$ está bien definido y además es independiente de λ.

En virtud de la propiedad (d_2), para cada solución aislada $x\in\Omega$ de la ecuación $y=x-Tx$, se define el índice de x relativo a T como

$$\mathrm{i}(T,x,y)=\lim_{n\to\infty}\deg(I-T,B_{\frac{1}{n}}(x),y).$$

En el caso $y=0$, siempre que no haya lugar a confusión, usaremos por simplicidad la notación $\mathrm{i}(T,x)$ en lugar de $\mathrm{i}(T,x,0)$.

I.2.2. Introducción a la Teoría de Bifurcación. Sea X un espacio de Banach real, $T:\mathbb{R}\times X\to X$ compacta con $T(\lambda,0)=0$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$. Notemos por Σ al cierre en $\mathbb{R}\times X$ del conjunto de pares de la forma $(\lambda,x)\in\mathbb{R}\times X$ con x solución no trivial de la ecuación

$$x=T(\lambda,x).\tag{1.2}$$

En ocasiones, para poner de manifiesto la dependencia en λ de (1.2), nos referiremos a ella como $(1.2)_\lambda$. En la siguiente definición damos el concepto de punto de bifurcación desde cero para este problema.

Definición 1.4. *Decimos que $\mu\in\mathbb{R}$ es un punto de bifurcación desde la solución trivial para* (1.2) *cuando* $(\mu,0)\in\Sigma$.

NOTAS 1.5. (1) Si $T(\lambda, x) = \lambda Lx$, con L lineal y compacta, entonces $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es punto de bifurcación si, y sólo si $\frac{1}{\mu}$ es valor propio de L.

(2) Sea $T(\lambda, x) = \lambda Lx + N(\lambda, x)$, con L lineal y compacta, N compacta con

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{N(\lambda, x)}{\|x\|} = 0,$$

uniformemente en conjuntos acotados de λ's. Si $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es punto de bifurcación entonces $\frac{1}{\mu}$ es valor propio de L. Además, todo valor característico[(2)] μ de multiplicidad algebraica impar es de hecho un punto de bifurcación (véase [**76**]).

Acerca de la existencia de continuos de soluciones, Rabinowitz en 1971 [**93**], obtuvo el siguiente resultado para aplicaciones de la forma dada en la Nota 1.5-2: "*si μ es un valor característico de multiplicidad algebráica impar, entonces existe un continuo C de Σ que o bien es no acotado en $\mathbb{R} \times X$ o bien $(\mu', 0) \in C$ para algún valor característico $\mu' \neq \mu$* ". Pero aún hay muchas situaciones en las que, para el resto de aplicaciones, el resultado sigue siendo cierto. Por ello, aunque la demostración es la misma que aquella dada por Rabinowitz, presentamos aquí un enunciado del resultado adecuado para el estudio general de nuestro problema.

La prueba de este resultado está basada en un lema topológico (véase [**60, 98**]), cuyo enunciado presentamos a continuación

LEMA 1.6. *Sea K un espacio métrico compacto, A y B dos subconjuntos cerrados disjuntos de K. Entonces, o bien existe un conjunto cerrado y conexo de K que conecte A y B o bien $K = K_A \cup K_B$, donde K_A y*

[(2)]inverso de un valor propio

K_B son subconjuntos compactos de K conteniendo respectivamente a A y B. $\square$

Teorema 1.7. *Sea $\mu \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ de manera que μ sea el único posible punto de bifurcación para* (1.2) *en el intervalo $(\mu - \varepsilon_0, \mu + \varepsilon_0)$. Supongamos además para cada $\underline{\lambda} \in (\mu - \varepsilon_0, \mu)$ y $\overline{\lambda} \in (\mu, \mu + \varepsilon_0)$ se tiene que*

$$\mathrm{i}(T(\underline{\lambda}, \cdot), 0) \neq \mathrm{i}(T(\overline{\lambda}, \cdot), 0).$$

Entonces la componente conexa, C_μ, de Σ que contiene a $(\mu, 0)$ verifica una de las siguientes condiciones:

(i) C_μ es no acotada en $\mathbb{R} \times X$,

(ii) existe un punto de bifurcación $\mu' \in \mathbb{R} \setminus \{\mu\}$ de manera que $(\mu', 0) \in C_\mu$.

Demostración. Razonemos por contradicción y supongamos que C_μ no verifica *(i)* ni *(ii)*. Entonces C_μ es acotado y $\delta_\varepsilon = \operatorname{dist}(C_\mu, (\mathbb{R} \setminus (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)) \times \{0\}) > 0$ para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Tomemos $\delta \in \mathbb{R}^+$ con $\delta < \frac{1}{2} \operatorname{mín}\{\delta_{\varepsilon_0}, \varepsilon_0\}$ y U_δ un δ-entorno de C_μ, esto es,

$$U_\delta = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X : \operatorname{dist}((\lambda, x), C_\mu) < \delta\}.$$

Por construcción es claro que $(\lambda, 0) \notin U_\delta$ siempre que $|\lambda - \mu| > \delta$.

Afirmamos ahora que *existe un conjunto $O \subset \mathbb{R} \times X$ verificando*

$$\partial O \cap \Sigma = \emptyset, \ (\mu, 0) \in O. \tag{1.3}$$

Basta tomar $O = U_\delta$ en el caso que $\Sigma \cap \partial U_\delta = \emptyset$. En otro caso, puesto que el conjunto $K = \overline{U}_\delta \cap \Sigma$ es un espacio métrico compacto, podemos aplicar el Lema 1.6 a los conjuntos cerrados C_μ y $\Sigma \cap \partial U_\delta$ para deducir la existencia de dos conjuntos compactos disjuntos A, B de K, con

$$K = A \cup B, \ C_\mu \subset A.$$

Podemos tomar ahora O como un entorno de A (de radio menor que la distancia entre A y B). De esta forma aseguramos que se verifica (1.3).

La propiedad general de invariancia por homotopía, (d_6), permite deducir que $\deg(I - T_\lambda, O_\lambda, 0)$ es constante para valores de λ en un intervalo compacto (notemos que gracias a (1.3), el grado topológico de Leray-Schauder relativo a T_λ, O_λ y 0 está bien definido). En particular para $\mu - \delta < \underline{\lambda} < \mu < \overline{\lambda} < \mu + \delta$

$$\deg(I - T_{\underline{\lambda}}, O_{\underline{\lambda}}, 0) = \deg(I - T_{\overline{\lambda}}, O_{\overline{\lambda}}, 0). \tag{1.4}$$

Por otra parte, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|\lambda - \mu| \leq \delta$ existe $\rho(\lambda) \in \mathbb{R}^+$ con $\rho(\lambda) < \delta$ de manera que 0 es la única solución de $(1.2)_\lambda$ en $\overline{B}_{\rho(\lambda)}$ (nótese que para $|\lambda - \mu| \leq \delta$, la solución trivial es aislada en Σ_λ). Tomemos además $\rho(\lambda) = \rho(\mu - \delta)$ para $\lambda < \mu - \delta$ y $\rho(\lambda) = \rho(\mu + \delta)$ para $\lambda > \mu + \delta$. Sea también $\rho = \inf\{\rho(\theta) : \theta \leq \underline{\lambda} \text{ o } \theta \geq \overline{\lambda}\}$. Por construcción sabemos que, para cada $\theta \notin (\underline{\lambda}, \overline{\lambda})$, el grado topológico de Leray-Schauder $\deg(I - T_\theta, O_\theta \setminus \overline{B}_\rho, 0)$ está bien definido. Es más, por la propiedad (d_6) de invariancia por homotopía y teniendo en cuenta que para θ suficientemente grande o suficientemente pequeño se tiene que $O_\theta = \emptyset$, se prueba que

$$\deg(I - T_{\underline{\lambda}}, O_{\underline{\lambda}} \setminus \overline{B}_\rho, 0) = \deg(I - T_{\overline{\lambda}}, O_{\overline{\lambda}} \setminus \overline{B}_\rho, 0) = 0.$$

Por otra parte, por la propiedad de excisión, (d_2), se tiene que

$$\begin{aligned} \deg(I - T_{\underline{\lambda}}, O_{\underline{\lambda}}, 0) &= \mathrm{i}(T_{\underline{\lambda}}, 0) + \deg(I - T_{\underline{\lambda}}, O_{\underline{\lambda}} \setminus \overline{B}_\rho, 0) \\ &= \mathrm{i}(T_{\underline{\lambda}}, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \deg(I - T_{\overline{\lambda}}, O_{\overline{\lambda}}, 0) &= \mathrm{i}(T_{\overline{\lambda}}, 0) + \deg(I - T_{\overline{\lambda}}, O_{\overline{\lambda}} \setminus \overline{B}_\rho, 0) \\ &= \mathrm{i}(T_{\overline{\lambda}}, 0). \end{aligned}$$

Por tanto, teniendo en cuenta (1.4) se deduce que

$$\mathrm{i}(T_{\underline{\lambda}}, 0) = \mathrm{i}(T_{\overline{\lambda}}, 0),$$

lo cual contradice la hipótesis. □

I.2.3. Continuos de soluciones sin bifurcación. Sea X un espacio de Banach real y consideremos una aplicación compacta $T : \mathbb{R} \times X \to X$. Durante la presente subsección notaremos por Σ al conjunto cerrado de los pares de la forma $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$ con x solución (no necesariamente no trivial) de $(1.2)_\lambda$. Probaremos una serie de resultados acerca de la existencia de continuos de soluciones en Σ. Comenzaremos con un teorema en el que damos condiciones suficientes para asegurar la existencia de un continuo no acotado de soluciones.

Teorema 1.8. *Sea $x_0 \in X$ una solución aislada del problema $(1.2)_{\mu_0}$ para algún $\mu_0 \in \mathbb{R}$, de manera que*

$$\mathrm{i}(T_{\mu_0}, x_0) \neq 0.$$

Entonces la componente conexa de Σ que contiene a (μ_0, x_0) es no acotada en $\mathbb{R} \times X$.

Demostración. Razonemos por contradicción y supongamos que la componente conexa, C, de Σ que contiene a (μ_0, x_0) es acotada. Puesto que x_0 es aislada, existe $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$(\{\mu_0\} \times B_{\delta_1}(x_0)) \cap \Sigma = \{(\mu_0, x_0)\}. \tag{1.5}$$

Sea U_δ un δ-entorno de C con $0 < \delta < \delta_1$, es decir

$$U_\delta = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X : \mathrm{dist}(\lambda, x), C) < \delta\}.$$

Al igual que en la prueba del teorema anterior, podemos tomar $O \subset \mathbb{R} \times X$ con $\partial O \cap \Sigma = \emptyset$, $(\mu_0, x_0) \in O$. Basta para ello tomar

$O = U_\delta$ en el caso que $\Sigma \cap \partial U_\delta = \emptyset$. En otro caso, puesto que el conjunto $K = \overline{U}_\delta \cap \Sigma$ es un espacio métrico compacto, podemos aplicar el Lema 1.6 a los conjuntos cerrados C y $\Sigma \cap \partial U_\delta$ para deducir la existencia de dos compactos disjuntos A, B de K, con

$$K = A \cup B,\ C \subset A.$$

Tomando O como un entorno de A conseguimos lo deseado. Así, el grado topológico $\deg(I - T_\lambda, O_\lambda, 0)$ está bien definido. Es más, usando la propiedad de invariancia por homotopía, (d_6), se deduce que $\deg(I - T_\lambda, O_\lambda, 0)$ es constante para valores de λ en un intervalo compacto. Por otra parte, puesto que O es acotado en $\mathbb{R} \times X$, existe $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$O_\lambda = \emptyset \text{ if } \lambda \notin (\mu_0 - \varepsilon_1, \mu_0 + \varepsilon_1),$$

lo que unido a (d_4) conduce a

$$\deg(I - T_\lambda, O_\lambda, 0) = 0,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

en particular $\deg(I - T_{\mu_0}, O_{\mu_0}, 0) = 0$, lo cual, usando (d_5) y (1.5) contradice que, por hipótesis, $\mathrm{i}(T_{\mu_0}, x_0) \neq 0$. $\square$

Bajo condiciones más restrictivas sobre T, el resultado anterior se puede mejorar considerablemente, obteniéndose varios conjuntos no acotados de soluciones. Concretamente tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.9. *Sea $(\mu_0, x_0) \in \mathbb{R} \times X$ tal que $T(\mu_0, x_0) = x_0$ y sea C la componente conexa Σ que contiene a (μ_0, x_0). Supongamos que en cierto entorno de (μ_0, x_0) toda solución sea aislada con índice no nulo, entonces todas las componentes conexas de $C \setminus \{(\mu_0, x_0)\}$ son no acotadas.*

Demostración. Notaremos por $\mathcal{C}$ al conjunto de toda las componentes conexas de $C \setminus \{(\mu_0, x_0)\}$. Si $\mathcal{C}$ tiene un único elemento, estamos en el caso del Teorema 1.8 y el resultado es cierto. Supongamos que $\mathcal{C}$ contenga al menos dos componentes. Consideremos, razonando por contradicción, que exista $C' \in \mathcal{C}$ acotada. En particular, existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ de manera que $\mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\overline{C'} = [\lambda_1, \lambda_2]$ (el cierre considerado en la topología de $\mathbb{R} \times X$).

Debido a que x_0 es una solución aislada en Σ_{μ_0}, podemos asegurar que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y existe $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^+$ de manera que

$$(\lambda_1, \lambda_2) \cap (\mu_0 - \epsilon_1, \mu_0 + \epsilon_1) \neq \emptyset.$$

En consecuencia, podemos también tomar $\epsilon \in (0, \epsilon_1)$ de manera que $\epsilon < \mathrm{dist}(\mu_0, (\partial \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\overline{C}') \setminus \{\mu_0\}) < \mathrm{diam}(C')$. Sea entonces $C_\epsilon = C' \setminus B((\mu_0, x_0), \frac{\epsilon}{2})$, y sea también $r_\epsilon = \mathrm{dist}(C_\epsilon, \mathcal{C} \setminus C')$, que claramente es positivo.

Siguiendo las pautas de la prueba anterior, tomamos U_δ un δ-entorno de C_ϵ, siendo $0 < \delta < \mathrm{mín}\{r_\epsilon, \epsilon\}$. Es claro nuevamente que $C_\epsilon \cap (\Sigma \cap \partial U_\delta) = \emptyset$, además toda solución en ∂U_δ conectada con C_ϵ debe ser un punto de $\partial U_\delta \cap C' \cap B((\mu_0, x_0), \frac{\epsilon}{2})$. Por tanto, $K \equiv (\overline{U}_\delta \setminus B((\mu_0, x_0), \frac{\epsilon}{2})) \cap \Sigma$ es un espacio métrico compacto y, por construcción, no hay ningún conexo que conecte C_ϵ con $K \cap \partial U_\delta$.

Si $K \cap \partial U_\delta = \emptyset$ tomamos $O = U_\delta \setminus \overline{B}((\mu_0, x_0), \frac{\epsilon}{2})$. En otro caso, estamos en condición de aplicar el Lema 1.6 y así existen A, B compactos disjuntos de K, con $K = A \cup B$, $C_\epsilon \subset A$.

Tomaremos en ese caso O como un ε-entorno de A, siendo $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(A, B)$. En cualquier caso, O satisface

$$\partial O \cap \Sigma \subset \partial B((\mu_0, x_0), \frac{\epsilon}{2}).$$

Puesto que O es acotado, debe existir $\epsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$O_\lambda = \emptyset, \text{ si } \lambda \notin (\lambda_1 - \epsilon_2, \lambda_2 + \epsilon_2).$$

Además,

$$\partial O_\lambda \cap \Sigma = \emptyset, \forall \lambda \in \Lambda \equiv \mathbb{R} \setminus [\mu_0 - \frac{\epsilon}{2}, \mu_0 + \frac{\epsilon}{2}]$$

con lo cual, $\deg(I - T_\lambda, O_\lambda, 0)$ está bien definido y usando la propiedad de invariancia por homotopía, es constante en cada intervalo compacto de Λ. Usando entonces que el grado es cero para el conjunto vacío, se tiene que

$$\deg(I - T_\lambda, O_\lambda, 0) = 0, \forall \lambda \in \Lambda.$$

y para ϵ suficientemente pequeño (eligiendo δ de manera que $O_\lambda \cap \Sigma$ se reduzca a un punto para valores de λ próximos a μ_0) esto contradice que, por hipótesis, en un entorno de (μ_0, x_0) toda solución tenga índice no nulo. $\square$

El siguiente resultado será de utilidad en numerosas situaciones para probar multiplicidad de soluciones, ya que probaremos la existencia de un continuo de soluciones partiendo hacia la derecha de una solución (a, u_1) el cual retorna, para algún valor del parámetro, hasta alcanzar una solución distinta (a, u_2).

TEOREMA 1.10. *Sea $U \subset X$ un abierto acotado y sean $a, b \in \mathbb{R}$ de manera que $(1.2)_\lambda$ no tenga solución en ∂U, para ningún $\lambda \in [a, b]$, y que $(1.2)_b$ no tenga solución en $\overline{U}$. Sea $U_1 \subset U$ abierto tal que $(1.2)_a$ no tenga solución en ∂U_1 y $\deg(I - T_a, U_1, 0) \neq 0$. Entonces existe un continuo C en $\Sigma = \{(\lambda, x) \in [a, b] \times X : x$ solución de $(1.2)_\lambda\}$, tal que*

$$C \cap (\{a\} \times U_1) \neq \emptyset, \quad C \cap (\{a\} \times (U \setminus U_1)) \neq \emptyset.$$

Demostración. Usaremos la siguiente notación

$$K = ([a,b] \times U) \cap \Sigma,$$

$$A = (\{a\} \times \overline{U}_1) \cap K,$$

$$B = (\{a\} \times \overline{(U \setminus U_1)}) \cap K.$$

Puesto que $(1.2)_b$ no tiene solución en $\overline{U}$ y K es compacto, podemos considerar que $K \subset [a,s] \times \overline{U}$ para algún $s \in (a,b)$.

Razonemos por contradicción y supongamos que el teorema es falso. Por el Lema 1.6, existen K_A, K_B subconjuntos compactos disjuntos conteniendo respectivamente a A y B, tales que $K = K_A \cup K_B$. Sea O un δ-entorno de K_A tal que $\operatorname{dist}(O, K_B) > 0$. Así el grado topológico de Leray-Schauder está bien definido en $O_\lambda = \{u \in \overline{U} : (\lambda, u) \in O\}$ para cada $\lambda \in [a,b]$. Además, por la propiedad general de invariancia por homotopía, (d_6), se tiene que

$$\deg(I - T_\lambda, O_\lambda, 0) = \text{constante},$$

y consecuentemente

$$\deg(I - T_a, O_a, 0) = \deg(I - T_b, O_b, 0). \tag{1.6}$$

Por otra parte, puesto que $O \cap K_B = \emptyset$, no hay soluciones de $(1.2)_a$ en $O_a \setminus \overline{U}_1$ y por tanto por la propiedad de excisión, (d_2), se tiene que

$$\deg(I - T_a, O_a, 0) = \deg(I - T_a, U_1, 0) \neq 0.$$

Sin embargo, puesto que por hipótesis sabemos que $O_b = \emptyset$, deducimos que $\deg(I - T_b, O_b, 0) = 0$. Por tanto hemos llegado a una contradicción con (1.6), probando así el teorema. $\square$

NOTA 1.11. En el teorema anterior, si $U_1 = U$, la hipótesis sobre $(1.2)_b$ nunca se satisface, ya que se puede probar (véase [**56, 88**]) usando el mismo argumento que existe un continuo C de soluciones de $(1.2)_\lambda$ verificando

$$C \cap (U \times \{a\}) \neq \emptyset, \quad C \cap (U \times \{b\}) \neq \emptyset.$$

Capítulo II

Conceptos y resultados preliminares.

II.1. La ecuación $Q(u) = h$.

En el desarrollo de este capítulo pretendemos plantear el problema de existencia de solución de (0.1) como un problema de búsqueda de puntos fijos de un operador compacto. Así, podremos emplear para su estudio las diferentes técnicas descritas en el capítulo anterior. Para ello comenzaremos estudiando la ecuación $Q(u) = h$, con h en un determinado espacio de funciones. Estudiaremos distintos conceptos de solución así como condiciones que aseguren la existencia y unicidad de la misma.

II.1.1. Diferentes conceptos de solución. Observemos en primer lugar que, para matrices $A(x, s)$ generales, $Q \equiv -\mathrm{div}(A(x, \cdot)\nabla\cdot)$ no puede ser considerado como un operador diferencial en el sentido clásico. Dada $u \in C^2(\Omega)$, tendríamos que imponer a los coeficientes de A que fuesen funciones de $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, para poder calcular Qu en el sentido clásico. En ese caso, para cada $h \in C(\overline{\Omega})$, diremos que $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ *es* **solución clásica** *de*

$$\left.\begin{array}{rcll} Qu &=& h(x), & x \in \Omega, \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{2.1}$$

si verifica $Qu(x) = h(x)$ *para todo* $x \in \Omega$.

Consideremos ahora $u \in C^2(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$, solución clásica de la ecuación $Qu = h$, para alguna función $h \in C(\overline{\Omega})$. Multiplicando la ecuación por $v \in C^1(\Omega)$ e integrando por partes, llegamos a que u verifica la siguiente ecuación integral

$$\int_\Omega A(x, u)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega h(x)v, \quad \forall v \in C^1(\Omega).$$

Gracias a (A_1), la ecuación integral anterior tiene perfecto sentido para $u, v \in H_0^1(\Omega)$ y $h \in H^{-1}(\Omega)$, sin necesidad de imponer regularidad a los coeficientes de A. Por tanto, diremos que $u \in H_0^1(\Omega)$ *es* **solución débil** *del problema* (2.1)*, con* $h \in H^{-1}(\Omega)$ *si satisface la ecuación integral anterior para cada* $v \in H_0^1(\Omega)$.

Llamaremos finalmente **solución débil continua** a toda solución débil que admita un representante continuo.

II.1.2. Existencia y unicidad de solución débil. Sea A una matriz verificando (A_{1-2}), entonces el operador no lineal Q es continuo (por (A_1)) y coercivo (por (A_2)). Así, por el resultado clásico de Leray y Lions [**81**] se deduce la existencia de una solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema (2.1) para cada $h \in H^{-1}(\Omega)$. Esto lo probamos en el siguiente lema.

Lema 2.1 (Existencia de Solución Débil). *Supongamos que A satisface las condiciones (A_{1-2}) y sea h un elemento de $H^{-1}(\Omega)$. Existe al menos una solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema* (2.1).

Demostración. Usaremos el método de "*congelamiento de los coeficientes*" debido a Schauder, esto es, definimos el operador S en $H_0^1(\Omega)$ tomando para cada $w \in H_0^1(\Omega)$, $S(w)$ como la única solución (débil) u del problema lineal

$$-\mathrm{div}\,(A(x,w)\nabla u) = h, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Probaremos que $S : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ tiene al menos un punto fijo. Observemos en primer ligar que $S(w)$ está bien definido para todo $w \in H_0^1(\Omega)$. Esto es consecuencia directa del Teorema de Lax-Milgram aplicado a la forma bilineal

$$a_w(u,v) = \int_\Omega A(x,w)\nabla u \cdot \nabla v, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

que por las condiciones (A_{1-2}), para cada $u, v \in H_0^1(\Omega)$ satisface

$$|a_w(u,v)| \leq \beta \|u\| \|v\|, \ (a_w \text{ es continua})$$

$$a_w(u,u) \geq \alpha \|u\|^2, \ (a_w \text{ es coerciva.})$$

Además, por la coercividad de a_w, también deducimos

$$\begin{aligned} \alpha \|S(w)\|^2 \leq & \int_\Omega A(x,w) \nabla S(w) \cdot \nabla S(w) = \int_\Omega h S(w) \\ \leq & \|h\|_{H^{-1}(\Omega)} \|S(w)\|, \end{aligned}$$

y así

$$\|S(w)\| \leq \frac{\|h\|_{H^{-1}(\Omega)}}{\alpha}.$$

Por lo tanto, S transforma la bola en $H_0^1(\Omega)$ de radio $R \equiv \|h\|_{H^{-1}(\Omega)}/\alpha$ centrada en cero, en ella misma. Para probar la existencia de un punto fijo de S en esta bola, por el Teorema del punto fijo de Schauder, es bastante probar que S es compacto. Esto se deduce de la siguiente afirmación: *toda sucesión w_n en $H_0^1(\Omega)$ débilmente convergente a $w \in H_0^1(\Omega)$ tiene una subsucesión w_{n_k} tal que $S(w_{n_k})$ converge fuertemente a $S(w)$ en $H_0^1(\Omega)$*. En efecto, denotemos $u_n = S(w_n)$ la cual satisface

$$\int_\Omega A(x, w_n) \nabla u_n \cdot \nabla v = \int_\Omega h v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

respectivamente, $u = S(w)$ satisface

$$\int_\Omega A(x, w) \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega h v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $v = u_n - u$ como función test en ambas ecuaciones y restando tenemos

$$\begin{aligned} 0 = & \int_\Omega A(x,w_n)\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u) - \int_\Omega A(x,w)\nabla u \cdot \nabla(u_n - u) \\ = & \int_\Omega \left(A(x,w_n) - A(x,w)\right)\nabla u \cdot \nabla(u_n - u) \\ & + \int_\Omega A(x,w_n)\nabla(u_n - u)\cdot\nabla(u_n - u). \end{aligned}$$

Puesto que w_n converge débilmente a w, pasando a una subsucesión si fuese necesario, obtenemos que $[A(x,w_n) - A(x,w)]\,\nabla u$ converge fuertemente a 0 en $L^2(\Omega)$. Esto junto con la acotación de $u_n = S(w_n)$ conduce a

$$\int_\Omega \left(A(x,w_n) - A(x,w)\right)\nabla u \cdot \nabla(u_n - u) \to 0,$$

lo que implica que $\int_\Omega A(x,w_n)\nabla(u_n - u)\cdot\nabla(u_n - u) \to 0$, y consecuentemente, por (A_2), que u_n converge fuertemente a u en $H_0^1(\Omega)$, probando la afirmación y por lo tanto el lema. □

La unicidad de solución débil del problema (2.1), es estudiada en [**32**], concretamente se prueba el siguiente principio de comparación para este tipo de operadores casi-lineales.

Lema 2.2 (Unicidad de Solución Débil). *Supongamos que A satisface las condiciones (A_{1-3}). Para cada $h_1, h_2 \in H^{-1}(\Omega)$, sean $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$ con $Q(u_i) = h_i$, $i = 1,2$. Si $h_1 \geq h_2$ en el sentido de las distribuciones, entonces $u_1 \geq u_2$. En particular, existe a lo más una solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ del problema* (2.1).

Demostración. Para cualquier función test positiva $v \in H_0^1(\Omega)$, $v \geq 0$, restando ambas ecuaciones y gracias a que $h_2 - h_1 \leq 0$, tenemos que

$$\int_\Omega (A(x,u_2)\nabla u_2 - A(x,u_1)\nabla u_1) \cdot \nabla v \leq 0. \tag{2.2}$$

Sea $w = u_2 - u_1$. Para cada $\varepsilon > 0$, la función

$$\psi_\varepsilon(w) = \int_0^{w^+} \frac{ds}{\omega^2(s+\varepsilon)},$$

es positiva y $\psi_\varepsilon(w) \in H_0^1(\Omega)$. Tomando entonces $v = \psi_\varepsilon(w)$ como función test en la desigualdad anterior obtenemos, sumando y restando el término $\displaystyle\int_\Omega \frac{A(x,u_2)\nabla u_1 \nabla w^+}{\omega^2(w^+ + \varepsilon)}$,

$$\int_\Omega \frac{A(x,u_2)\nabla(u_2 - u_1)\nabla w^+}{\omega^2(w^+ + \varepsilon)} \leq \int_\Omega \frac{(A(x,u_1) - A(x,u_2))\nabla u_1 \nabla w^+}{\omega^2(w^+ + \varepsilon)}.$$

Usando (A_2), (A_3) y la desigualdad de Cauchy deducimos ahora que

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega \frac{|\nabla w^+|^2}{\omega^2(w^+ + \varepsilon)} &\leq \int_\Omega \frac{|\nabla u_1||\nabla w^+|}{\omega(w^+ + \varepsilon)} \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u_1|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \frac{|\nabla w^+|^2}{\omega^2(w^+ + \varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

De la desigualdad de Poincaré se sigue que

$$\int_\Omega \left[\int_0^{w^+} \frac{ds}{\omega(s+\varepsilon)}\right]^2 \leq c_1, \tag{2.3}$$

siendo c_1 una constante que depende a lo más de α, $\|h_1\|$, y de Ω.

Probaremos ahora que *el conjunto* $E_\rho = \{x \in \Omega : w^+(x) \geq \rho\}$ *tiene medida cero para todo* $\rho > 0$. En efecto, en otro caso, haciendo tender ε a cero, (2.3) está en contradicción con (A_3). Por lo tanto $w^+ = 0$, es decir, $u_2 \leq u_1$. □

NOTAS 2.3. (1) Como consecuencia del lema anterior, asumiendo (A_{1-3}), podemos considerar el inverso $T : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ del operador Q, es más T es monótono creciente. Además, observemos que, de nuevo por las condiciones (A_{1-3}), el operador T es compacto en $L^2(\Omega)$. En efecto, solo tenemos que probar que de cada sucesión h_n débilmente convergente a h en $L^2(\Omega)$ podemos extraer una sucesión parcial h_{n_k} tal que $T(h_{n_k})$ converja fuertemente a $T(h)$ en $H_0^1(\Omega)$. Para probarlo, denotando $u_n = T(h_n)$ y $u = T(h)$, tomamos u_n como función test y deducimos de (A_2) que

$$\alpha\|u_n\|^2 \leq \int_\Omega A(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla u_n = \int_\Omega h_n u_n \leq c\|h_n\|_{L^2(\Omega)}\|u_n\|,$$

y por tanto, u_n es acotada en $H_0^1(\Omega)$. Podemos asumir, pasando a una subsucesión si fuese necesario, que u_n converge débilmente en $H_0^1(\Omega)$ a algún $v \in H_0^1(\Omega)$. Ahora bien, usando que u_n es solución de (2.1) para $h = h_n$ obtenemos por el teorema de Rellich que v es solución de (2.1) para $h = h$; es decir, por (A_3), $v = T(h) = u$. Tomando $u_n - u$ como función test en la ecuación que satisface u_n, (A_2) conduce a

$$\begin{aligned}
\alpha\|u_n - u\|^2 &\leq \int_\Omega A(x,u_n)\nabla(u_n - u)\cdot\nabla(u_n - u) \\
&= \int_\Omega h_n(u_n - u) - \int_\Omega A(x,u_n)\nabla u \cdot \nabla(u_n - u).
\end{aligned}$$

Obsérvese que por el Teorema de Lebesgue y (A_2), la sucesión $A(x,u_n)\nabla u$ converge fuertemente a $A(x,u)\nabla u$ en $L^2(\Omega)$. Consecuentemente, el lado derecho de la desigualdad anterior tiende a cero y así, u_n converge fuertemente a u en $H_0^1(\Omega)$.

(2) Si además h pertenece a algún espacio de Lebesgue $L^r(\Omega)$ ($r > N/2$), entonces, por el Teorema de De Giorgi-Stampacchia (véase [**96**, Théorème 7.3] y [**59**, Theorem I] o [**69**, Theorem 8.29]), la solución es $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ (para algún $0 < \alpha < 1$). Más aún, si los coeficientes a_{ij} son $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$, $0 < \gamma < 1$, entonces, usando el Teorema 15.17 de [**69**] tenemos que toda solución u de $Q(u) = h$ pertenece a $C_0^{2,\alpha\gamma}(\overline{\Omega})$ para cada $h \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$.

(3) Observemos por último que todos los resultados obtenidos anteriormente para el operador Q son extrapolables al operador $Q + mI$, para cada $m \geq 0$, bajo las mismas condiciones.

II.2. Planteamiento abstracto del problema general.

Consideremos en esta sección una función de Carathéodory f definida en $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ con crecimiento subcrítico, es decir tal que existen funciones positivas $c_1(x), c_2(x)$ en $L^r(\Omega)$ ($r > N/2$) y $0 \leq p < 2^* - 1$ verificando

$$|f(x,s)| \leq c_1(x)|s|^p + c_2(x), \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \ \forall\, s \in \mathbb{R}.$$

Así, es claro que las soluciones débiles continuas del problema (0.1) son justamente los ceros del operador Φ definido en $E = C_0(\overline{\Omega})$ por

$$\Phi(u) \equiv u - T(f(x,u)), \quad u \in E,$$

donde, por simplicidad, denotamos de la misma forma a la función f y al operador de Nemystskii asociado a ella. Observemos que si $u \in E$ entonces $f(x,u) \in L^r(\Omega)$ ($r > N/2$) y los teoremas de regularidad implican que $T(f(x,u)) \in E$. Así, $\Phi : E \to E$ está bien definida.

Lo anterior lo resumimos en el siguiente lema:

LEMA 2.4. *Supongamos que A verifica las condiciones* (A_{1-3}) *y que* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es una función de Carathéodory con crecimiento sucrítico. Entonces,* $u \in E$ *es solución de* (0.1) *si, y sólo si*

$$\Phi(u) = u - T(f(x,u)) = 0.$$

Con el lema anterior conseguimos plantear nuestro problema como uno de existencia de puntos fijos de un operador T compacto y monótono definido en un espacio de Banach X (en nuestro caso $X = E$). Por tanto, para su estudio, podemos usar las técnicas descritas en el capítulo anterior, grado topológico de Leray-Schauder, teoría de bifurcación (para no-linealidades dependientes de un parámetro, $f : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificando $(\tilde{f_1})$) y métodos basados en las técnicas de sub y super-soluciones. En ese sentido, recordemos que los conceptos de sub y super-solución los podemos enunciar, para el operador diferencial, como sigue:

DEFINICIÓN 2.5. i) *Decimos que* $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ *es super-solución del problema* (0.1) *si verifica*

$$\left.\begin{array}{rcll} Q(\overline{u}) & \geq & f(x,\overline{u}), & x \in \Omega, \\ \overline{u} & \geq & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

ii) *Decimos que* $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ *es sub-solución del problema* (0.1) *si verifica*

$$\left.\begin{array}{rcll} Q(\underline{u}) & \leq & f(x,\underline{u}), & x \in \Omega, \\ \underline{u} & \leq & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

II.3. Soluciones positivas.

En muchas situaciones es interesante preguntarse por la existencia de soluciones positivas del problema (0.1). En estos casos puede ser conveniente considerar otro problema para el cual los conceptos de solución y de solución positiva coincidan, de manera que toda solución de éste lo sea también del primero. Concretamente, si $f(x,0) \geq 0$ a.e. $x \in \Omega$, podemos tomar $\tilde{f}(x,s) = f(x,s^+)$, $\tilde{A}(x,s) = A(x,s^+)$ y considerar el problema truncado

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(\tilde{A}(x,u)\nabla u) & = & \tilde{f}(x,u), & x \in \Omega, \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

para obtener el siguiente resultado

Lema 2.6. *Supongamos que* A *satisface* $(A_{1,2})$ *y que* $f(x,0) \geq 0$ *a.e.* $x \in \Omega$. *Una función* $u \in H_0^1(\Omega)$ *es solución positiva de* (0.1) *si, y sólo si* u *es solución del problema truncado. Si además se verifica* (A_3) *y para algún* $0 < \gamma < 1$,

$$\begin{array}{c} a_{ij}(x,s) \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}), \\ f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+), \end{array} \tag{2.4}$$

entonces dicha solución está contenida en el interior del cono P *de funciones positivas de* $C_0^1(\overline{\Omega})$.

Demostración. Para la demostración de la primera parte solamente hace falta observar que toda solución del problema truncado es no negativa. Para ello basta tomar $u^- = \min\{u,0\}$ como función test en la formulación débil del problema, para obtener por (A_2)

$$\alpha\|u^-\|^2 \leq \int_\Omega A(x,0)\nabla u^- \cdot \nabla u^- = \int_\Omega f(x,0)u^- \leq 0,$$

y por tanto $u^- \equiv 0$.

La segunda parte es consecuencia de los teoremas de regularidad (véase Nota 2.3 − 2) y del Lema de Hopf. $\square$

Capítulo III

Resultados de Bifurcación.

III.1. Bifurcación desde infinito.

En esta sección estudiamos bifurcación desde infinito de soluciones débiles continuas (a partir de ahora soluciones) para el problema (P_λ). Diremos que λ_∞ es punto de bifurcación en infinito si existe una sucesión de pares $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times E$ con $\lambda_n \to \lambda_\infty$, $\|u_n\|_0 \to \infty$, tales que u_n sea solución de (P_{λ_n}). Comprobaremos que si λ_∞ es punto de bifurcación desde infinito, entonces es autovalor de un problema de valores propios con pesos. Además probaremos que el primer valor propio es de hecho un punto de bifurcación desde infinito. Se verá que en este caso $u_n/\|u_n\|$ converge o bien a una función positiva o bien a una función negativa. Por brevedad trataremos aquí el caso de convergencia a la función positiva y así no es de estrañar que, según el Lema 2.6, baste estudiar el problema con matriz A y la función f truncadas. Por simplicidad seguiremos notándo las truncadas de la misma forma. Probaremos la existencia de una bifurcación global desde infinito si la matriz $A(x,s)$ satisface (A_{1-4}), $f(\lambda, x, 0) \geq 0$ a.e. $x \in \Omega$ y para todo $\lambda \in [0, +\infty)$ y f además de $(\tilde{f}_1)$, verifica una condición similar a (f_2) sobre su comportamiento asimptótico en infinito, esto es, existe una función positiva $f'_\infty \in L^r(\Omega)$, $(r > N/2)$, tal que, para cada $\lambda \in [0, +\infty)$

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(\lambda, x, s)}{s} = \lambda f'_\infty(x), \text{ uniformemente } x \in \Omega. \tag{$\tilde{f}_2$}$$

Respecto a la dependencia en λ supondremos que existen funciones positivas $K_1(x), K_2(x) \in L^r(\Omega)$ tales que para cada $\lambda, \overline{\lambda} \in [0, +\infty)$,

$$|f(\lambda, x, s) - f(\overline{\lambda}, x, s)| \leq |\lambda - \overline{\lambda}| \left[K_1(x)s + K_2(x)\right], \tag{$\tilde{f}_3$}$$

a.e. $x \in \Omega$ y para cada $s \in \mathbb{R}^+$.

Notemos que las condiciones $(\tilde{f}_{1-3})$ implican que se verifica la condición (f_1) en conjuntos acotados de λ.

Observesé también que la condición $(f'_\infty)^+ \not\equiv 0$ implica que el problema de autovalores con pesos

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A_\infty(x)\nabla u) & = & \lambda f'_\infty(x)u, & x \in \Omega \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{array}\right\}$$

posee un primer autovalor positivo $\mu_1(f'_\infty)$ (véase [**54**]). Denotaremos

$$\lambda_\infty = \mu_1(f'_\infty). \tag{3.1}$$

y ψ la autofunción positiva con $\|\psi\| = 1$ asociada a λ_∞.

Lema 3.1. *Supongamos satisfechas las condiciones (A_{1-4}), $(\tilde{f}_{1-3})$ y $f(\lambda, x, 0) \geq 0$ a.e. $x \in \Omega$, y para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Sea $\Lambda \subseteq [0, \lambda_\infty)$ un intervalo compacto. Existe un número real $R > 0$ tal que, para cada u en E con $\|u\|_0 \geq R$, $t \in [0,1]$ y para cada $\lambda \in \Lambda$,*

$$u \neq T(tf(\lambda, x, u)).$$

Demostración. Razonaremos por contradicción suponiendo que existan sucesiones $\lambda_n \in \Lambda$, $t_n \in [0,1]$ y $u_n \in E$ con $\|u_n\|_0 \to \infty$, tales que

$$u_n = T(t_n f(\lambda_n, x, u_n)).$$

Puesto que Λ y $[0,1]$ son conjuntos compactos, deducimos que existen $\lambda \in \Lambda$ y $t \in [0,1]$ tales que–pasando a subsucesión–$\lambda_n \to \lambda$ y $t_n \to t$. Usando el Teorema de Stampacchia, [**96**, Théorème 4.2] (véase también [**69**, Theorem 8.29]), de la convergencia de $\|u_n\|_0$ a infinito, se deduce también que $\|u_n\| \to \infty$. Más aún, si definimos la sucesión normalizada $z_n := u_n\|u_n\|^{-1}$, tenemos que z_n verifica la siguiente ecuación

$$\int_\Omega A(x, u_n)\nabla z_n \cdot \nabla v = t_n \int_\Omega \frac{f(\lambda_n, x, u_n)}{\|u_n\|} v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.2}$$

Usando (A_2) y que $f(\lambda,x,s) = f(\lambda,x,0) \geq 0$, para $\lambda \in \Lambda \subset [0,\infty)$, $s < 0$, obtenemos del principio del máximo que $z_n \geq 0$.

Puesto que z_n es uniformemente acotado en $H_0^1(\Omega)$, deducimos–pasando a subsucesión–la existencia de una función z en $H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} z_n &\rightharpoonup z, && \text{(débilmente en) } H_0^1(\Omega), \\ z_n(x) &\to z(x) \geq 0, && \text{a.e. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Tomando $v = z_n - z$ como función test en (3.2) y usando la hipótesis (A_2) obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha\|z_n - z\|^2 &\leq \int_\Omega A(x,u_n)\nabla(z_n - z)\cdot\nabla(z_n - z) \\ &= t_n \int_\Omega \frac{f(\lambda_n,x,u_n)}{\|u_n\|}(z_n - z) - \int_\Omega A(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n - z). \end{aligned}$$

Así, usando (f_1), tenemos

$$\begin{aligned} \alpha\|z_n - z\|^2 \leq\ & t_n \int_\Omega \left(C_1(x)z_n + \frac{C_2(x)}{\|u_n\|}\right)|z_n - z| \\ & - \int_{\Omega^+} A(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n - z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $\Omega^+ := \{x \in \Omega \,:\, z(x) > 0\}$. Notemos que $u_n = \|u_n\|z_n \to +\infty$ casi para todo x in Ω^+. Entonces, gracias a las hipótesis (A_1) y (A_4), podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue y deducir que $A(x,u_n)\nabla z \to A_\infty(x)\nabla z$ fuertemente en $L^2(\Omega^+)$, y

$$\int_{\Omega^+} A(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n - z) \to 0.$$

Más aún, por el Teorema de inmersión compacto de Rellich-Kondrachov y la acotación en $H_0^1(\Omega)$ de la sucesión z_n, también tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \left(C_1(x) z_n + \frac{C_2(x)}{\|u_n\|} \right) |z_n - z| = 0.$$

Por lo tanto, de (3.3) deducimos que $z_n \to z$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$, y así z no es idénticamente nula. Además, obtenemos

$$\left| \int_{\Omega\setminus\Omega^+} [A(x,u_n) - A_\infty(x)] \nabla z_n \cdot \nabla v \right| \leq 2\beta \int_{\Omega\setminus\Omega^+} |\nabla z_n| |\nabla v|,$$

y

$$2\beta \int_{\Omega\setminus\Omega^+} |\nabla z_n| |\nabla v| \to 2\beta \int_{\Omega\setminus\Omega^+} |\nabla z| |\nabla v| = 0,$$

de donde,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega A(x,u_n) \nabla z_n \cdot \nabla v = \int_\Omega A_\infty(x) \nabla z \cdot \nabla v, \ \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Por otra parte,

$$\left| \int_\Omega \frac{f(\lambda_n, x, u_n)}{\|u_n\|} v - \int_\Omega \frac{f(\lambda, x, u_n)}{\|u_n\|} v \right| \leq \int_\Omega \frac{|f(\lambda_n, x, u_n) - f(\lambda, x, u_n)|}{\|u_n\|} v,$$

y usando $(\tilde{f}_3)$ tenemos

$$\int_\Omega \frac{|f(\lambda_n, x, u_n) - f(\lambda, x, u_n)|}{\|u_n\|} v \leq |\lambda_n - \lambda| \int_\Omega \left[K_1(x) z_n + \frac{K_2(x)}{\|u_n\|} \right] v.$$

Así, del Teorema de inmersión de Sobolev y aplicando la hipótesis $(\tilde{f}_2)$ deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{f(\lambda_n, x, u_n)}{\|u_n\|} v = \lambda \int_\Omega f'_\infty(x) z v, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Pasando al límite en (3.2), obtenemos que la función no trivial y no negativa z es solución de

$$-\mathrm{div}(A_\infty(x)\nabla z) = t\lambda f'_\infty(x)z, \qquad \text{en } \Omega,$$

lo que significa que $t\lambda = \lambda_\infty$ y $z = \psi$; es decir, una contradicción con el hecho que $t\lambda < \lambda_\infty$. $\square$

NOTA 3.2. El lema anterior prueba en particular que no hay puntos de bifurcación de soluciones positivas desde infinito para (P_λ) en el intervalo $[0, \lambda_\infty)$. Podemos probar incluso más. Específicamente, no hay puntos de bifurcación desde infinito distintos de λ_∞ en $[0, +\infty)$. En efecto, supongamos que $\lambda > 0$ es un punto de bifurcación desde infinito, es decir, existe una sucesión (λ_n, u_n) tal que u_n es solución positiva del problema (P_{λ_n}), $\|u_n\|_0 \to \infty$ y $\lambda_n \to \lambda$. Siguiendo los mismos argumentos del Lema 3.1 (con $t = 1$), llegamos a que existe $z \in H_0^1(\Omega)$ con $z > 0$, $\|z\| = 1$ y z es solución del problema

$$-\mathrm{div}(A_\infty(x)\nabla z) = \lambda f'_\infty(x)z,$$

entonces $z = \psi$ y $\lambda = \lambda_\infty$.

LEMA 3.3. *Supongamos que las condiciones (A_{1-4}) y $(\tilde{f}_{1-3})$ se satisfacen y $f(\lambda, x, 0) \geq 0$ a.e. $x \in \Omega$, y para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Sea ϕ una función positiva en $E \cap H_0^1(\Omega)$. Si $\lambda > \lambda_\infty$, entonces existe $R > 0$ tal que para todo $\tau \geq 0$,*

$$u - T(f(\lambda, x, u) + \tau\phi) \neq 0.$$

para cada u de E con $\|u\|_0 \geq R$.

DEMOSTRACIÓN. Razonemos por contradicción y supongamos que para cierta sucesión u_n en E con $\|u_n\|_0 \to \infty$ y para alguna sucesión de números reales no negativos τ_n, tengamos

$$-\mathrm{div}(A(x,u_n)\nabla u_n) = f(\lambda,x,u_n) + \tau_n\phi. \tag{3.4}$$

Usando u_n^- como función test obtenemos

$$\int_\Omega A(x,u_n)\nabla u_n^- \cdot \nabla u_n^- = \int_\Omega f(\lambda,x,u_n^-)u_n^- + \tau_n \int_\Omega u_n^-\phi.$$

Puesto que $\tau_n \geq 0$ y ϕ es positiva, teniendo en cuenta que $f(\lambda,x,s) = f(\lambda,x,0) \geq 0$ para todo $s \leq 0$, deducimos de la condición (A_2)

$$\alpha\|u_n^-\|^2 \leq \int_\Omega \left(f(\lambda,x,0) + \tau_n\phi\right) u_n^- \leq 0,$$

y, por tanto, $u_n \geq 0$.

Como en la prueba del lema anterior, el Teorema de Stampacchia, permite deducir que $\|u_n\| \to \infty$ y definiendo la sucesión normalizada $z_n := u_n\|u_n\|^{-1}$, podemos suponer que $z_n \rightharpoonup z$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$ para algún $z \in H_0^1(\Omega)$ y $z \geq 0$. Tomando $\phi/\|u_n\|$ como función test en (3.4) y usando la condición (A_1) y (f_1) deducimos la existencia de una constante positiva C tal que

$$\frac{\tau_n}{\|u_n\|}\int_\Omega \phi^2 \leq \int_\Omega \left(C_1(x)z_n + \frac{C_2(x)}{\|u_n\|}\right)\phi + \beta\|\phi\| \leq C.$$

Entonces, pasando a subsucesiones, existe $\tau^* \geq 0$ tal que $\dfrac{\tau_n}{\|u_n\|} \to \tau^*$.

Además, tomando $(z_n - z)/\|u_n\|$ como función test in (3.4), obtenemos

$$\int_\Omega A(x,u_n)\nabla z_n \cdot \nabla(z_n - z) = \int_\Omega \frac{f(\lambda,x,u_n)}{\|u_n\|}(z_n - z) + \frac{\tau_n}{\|u_n\|}\int_\Omega \phi(z_n - z).$$

Restando $\int_\Omega A(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n-z)$ obtenemos de (A_2) y (f_1) que

$$\begin{aligned}
\alpha\|z_n-z\|^2 &\leq \int_\Omega A(x,u_n)\nabla(z_n-z)\cdot\nabla(z_n-z) &(3.5)\\
&= \int_\Omega \frac{f(\lambda,x,u_n)}{\|u_n\|}(z_n-z)+\frac{\tau_n}{\|u_n\|}\int_\Omega\phi(z_n-z)\\
&\quad -\int_\Omega A(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n-z)\\
&\leq \int_\Omega\left(C_1(x)z_n+\frac{C_2(x)}{\|u_n\|}\right)|z_n-z|\\
&\quad +\frac{\tau_n}{\|u_n\|}\int_\Omega\phi(z_n-z)-\int_\Omega A(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n-z).
\end{aligned}$$

Por el Teorema de inmersión compacta de Rellich-Kondrachov tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega\left(C_1(x)z_n+\frac{C_2(x)}{\|u_n\|}\right)|z_n-z|=0,\quad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega\phi(z_n-z)=0.$$

Las condiciones (A_1) y (A_4) implican que $A(x,u_n)\nabla z_n$ converge fuertemente en $L^2(\Omega^+)$ a $A_\infty(x)\nabla z$, donde $\Omega^+=\{x\in\Omega : z(x)>0\}$. Así llegamos a

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega A(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n-z)=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega^+}A(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n-z)=0.$$

Por tanto, (3.5) conduce a la convergencia fuerte de z_n hacia z en $H_0^1(\Omega)$ y z es no trivial. Dividiendo (3.4) por $\|u_n\|$ y pasando al límite obtenemos que z es solución de la siguiente ecuación

$$-\mathrm{div}(A_\infty(x)\nabla z)=\lambda f'_\infty(x)z+\tau^*\phi.$$

Usando ψ como función test obtenemos que

$$\lambda_\infty\int_\Omega f'_\infty(x)z\psi\geq\lambda\int_\Omega f'_\infty(x)z\psi,$$

y puesto que $z \not\equiv 0$, $\lambda_\infty \geq \lambda$, lo cual es una contradicción. $\square$

Ahora, combinando los dos lemas anteriores, podemos obtener condiciones suficientes para tener bifurcación global desde infinito de soluciones positivas en $\lambda = \lambda_\infty$. Además, extendiendo las ideas de [**26**], podemos también determinar si la bifurcación ocurre a la derecha o a la izquierda de $\lambda = \lambda_\infty$.

Denotaremos por Σ a la clausura del conjunto de los pares $(\lambda, u) \in \mathbb{R}_0^+ \times E$ tales que u es solución no trivial de (P_λ); es decir,

$$\Sigma \equiv \mathrm{cl}\{(\lambda, u) \in \mathbb{R}_0^+ \times E : \; u \neq 0 \text{ es solución de } (P_\lambda)\}.$$

TEOREMA 3.4. *Supongamos que A y f satisfacen respectivamente las condiciones (A_{1-4}) y $(\tilde{f}_{1-3})$, y que $f(\lambda, x, 0) \geq 0$ a.e. $x \in \Omega$, y para todo $\lambda \in \mathbb{R}_0^+$. Entonces $\lambda_\infty = \mu_1(f'_\infty)$ es un punto de bifurcación desde infinito de soluciones positivas, y es el único en $\mathbb{R}_0^+$. Más aún, existe una componente no acotada $\Sigma_\infty \subset \Sigma$ tal que*

$$\widetilde{\Sigma}_\infty = \left\{(\lambda, u) \text{ con } u \neq 0, \left(\lambda, \frac{u}{\|u\|_0^2}\right) \in \Sigma_\infty\right\} \cup \{(\lambda_\infty, 0)\}$$

es conexo y, si $f(0, x, s) \leq 0$ a.e. $x \in \Omega$ para todo $s \in \mathbb{R}^+$, es no acotado. Además, si se verifica (2.4), $r > N$ y $a_\infty^{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, tenemos

(i) *si existen $\varepsilon_0 > 0$, $\sigma \in (0, 3 - \frac{1}{r})$ y $\underline{C}(x) \in L^r(\Omega)$ y denotamos $\underline{\mu}(x) \equiv \liminf_{(\lambda,s)\to(\lambda_\infty,\infty)} [f(\lambda, x, s) - \lambda f'_\infty(x) s]\, s^{\sigma-1}$, de manera que se satisfaga*

$$\begin{gathered}
[A(x,s) - A_\infty(x)] \leq 0, \;\; a.e. \; x \in \Omega, \; \forall s > 0, \\
[f(\lambda, x, s) - \lambda f'_\infty(x) s]\, s^{\sigma-1} \geq \underline{C}(x), \quad a.e. \; x \in \Omega, \; \forall s > 0, \\
\forall \lambda \in (\lambda_\infty - \varepsilon_0, \lambda_\infty + \varepsilon_0), \\
\int_\Omega \underline{\mu}(x) \psi^{2-\sigma}(x) > 0,
\end{gathered} \tag{3.6}$$

entonces la bifurcación de soluciones positivas es subcrítica (es decir, a la izquierda de $\lambda = \lambda_\infty$),

(ii) si existen $\varepsilon_1 > 0$, $\sigma \in (0, 3 - \frac{1}{r})$ y $\overline{C}(x) \in L^r(\Omega)$, y denotamos $\overline{\mu}(x) \equiv \limsup_{(\lambda,s)\to(\lambda_\infty,\infty)} [f(\lambda,x,s) - \lambda f'_\infty(x)s]\, s^{\sigma-1}$, de manera que se satisfaga

$$\begin{gathered}
[A(x,s) - A_\infty(x)] \geq 0, \;\; a.e.\ x \in \Omega,\ \forall s > 0, \\
[f(\lambda,x,s) - \lambda f'_\infty(x)s]\, s^{\sigma-1} \leq \overline{C}(x), \quad a.e.\ x \in \Omega,\ \forall s > 0, \\
\forall \lambda \in (\lambda_\infty - \varepsilon_1, \lambda_\infty + \varepsilon_1), \\
\int_\Omega \overline{\mu}(x)\psi^{2-\sigma}(x) < 0,
\end{gathered}$$

entonces la bifurcación de soluciones positivas es supercrítica (es decir, a la derecha de λ_∞).

NOTAS 3.5. (1) Observemos que $(\lambda_\infty, 0) \in \widetilde{\Sigma}_\infty$ significa que Σ_∞ emana desde ∞ en λ_∞.

(2) Puesto que $\psi \in \overset{\circ}{P}$, si r' es el exponente conjugado de r, es decir $r' = r/(r-1)$, entonces

$$\psi^{2-\sigma} \in L^{r'}(\Omega) \Longleftrightarrow \sigma < 3 - \frac{1}{r}.$$

Así, el rango de valores del exponente σ está estrictamente relacionado con la integrabilidad de la función $\psi^{2-\sigma}$. De esta forma, para $\sigma < 3 - \frac{1}{r}$, si $\lim_{(\lambda,s)\to(\lambda_\infty,\infty)} [f(\lambda,x,s) - \lambda f'_\infty(x)s]\, s^{\sigma-1}$ existe y es igual a $\mu \in \mathbb{R}^*$ a.e. $x \in \Omega$, entonces *(i)* y *(ii)* implican que el lado en el que ocurre la bifurcación desde infinito es decidido por el signo de μ. La condición $\sigma < 3 - \frac{1}{r}$ es esencial para deducir el lado de la bifurcación a partir de hipótesis en el comportamiento de f (y A) en $s = +\infty$. En efecto, en el caso $A(x,s) = I$ y $r = \infty$, ha sido probado en [**26**] que si $\sigma \geq 3$ no es posible determinar si la bifucación es supercrítica (o subcrítica) solamente considerando hipótesis sobre el comportamiento de la no-linealidad para valores grandes de s como en la tercera condición de (3.6).

Demostración. En orden a estudiar la bifurcación desde infinito, seguimos el desarrollo estándar (véase por ejemplo [**10**]) y realizamos el cambio de variable $z := \|u\|_0^{-2} u$ $(u \neq 0)$. Consideramos entonces la aplicación $\Psi_\lambda : E \to E$ definida por

$$\Psi_\lambda(z) = \begin{cases} z - \|z\|_0^2 T\left(f\left(\lambda, x, \dfrac{z}{\|z\|_0^2}\right)\right), & z \neq 0, \\ \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Por la Nota 3.2 sabemos que λ_∞ es el único posible punto de bifurcación desde infinito en $\mathbb{R}_0^+$. Para probar que λ_∞ es realmente un punto de bifurcación desde infinito, mostraremos que el índice de la solución trivial para la ecuación $\Psi_\lambda(u) = 0$ cambia cuando λ cruza $\lambda = \lambda_\infty$. En efecto, si $0 \leq \lambda < \lambda_\infty$, aplicando el Lema 3.1 al conjunto compacto $\Lambda = \{\lambda\}$ obtenemos la existencia de un número real positivo $R > 0$ tal que para cada $t \in [0,1]$ y cada u en E con $\|u\|_0 \geq R$,

$$u - T(tf(\lambda, x, u)) \neq 0.$$

Por lo tanto, obtenemos de la invariancia por homotopía (d_3) del grado de Leray-Schauder que

$$\deg(\Psi_\lambda, B_\varepsilon, 0) = \deg(I, B_\varepsilon, 0) = 1, \quad \forall \varepsilon \in (0, R^{-1}],$$

y consecuentemente,

$$\mathrm{i}(\Psi_\lambda, 0) = 1, \qquad \forall\, \lambda \in [0, \lambda_\infty).$$

Por otra parte, si $\lambda > \lambda_\infty$, del Lema 3.3, deducimos la existencia de $R_0 > 0$ tal que

$$u \neq T(f(\lambda, x, u) + t\phi),$$

para todo $u \in E$ con $\|u\|_0 \geq R_0$, y para cada $t \in [0,1]$. Entonces, si definimos la homotopía H en $[0,1] \times E$ por

$$H(t,z) = \begin{cases} z - \|z\|_0^2 T\left(f\left(\lambda, x, \dfrac{z}{\|z\|_0^2}\right) + t\phi\right), & z \neq 0, \\ \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

ésta es admisible en $[0,1] \times B_\varepsilon$, para $\varepsilon \in (0, R_0^{-1}]$. Más aún, el Lema 3.3 muestra que $H(1,\cdot)$ no tiene ceros en B_ε. Por lo tanto, tenemos

$$\deg(\Psi_\lambda, B_\varepsilon, 0) = \deg(H(0,\cdot), B_\varepsilon, 0) = \deg(H(1,\cdot), B_\varepsilon, 0) = 0.$$

con lo cual

$$\mathrm{i}(\Psi_\lambda, 0) = 0, \quad \forall \lambda > \lambda_\infty,$$

y la conclusión de la existencia de Σ_∞ se obtiene del Teorema 1.7.

En lo concerniente al estudio del lado de la bifurcación, es decir, los items *(i)* y *(ii)*, probaremos solamente la afirmación *(i)*, la otra se puede probar de manera similar y se deja al lector. Razonemos por contradicción y consideremos una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R}^+ \times E$ verificando

$$\int_\Omega A(x, u_n)\nabla u_n \cdot \nabla v = \int_\Omega f(\lambda_n, x, u_n) v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

con λ_n convergiendo a λ_∞, $\lambda_n \geq \lambda_\infty$, y $\|u_n\|_0 \to +\infty$. Por (2.4) cada solución u_n pertenece al interior del cono P (véase Lema 2.6)). De esta forma, podemos tomar $v = \psi^2/u_n$ como función test en la ecuación anterior y obtenemos

$$\int_\Omega A(x,u_n)\nabla u_n \cdot \left[2\frac{\psi}{u_n}\nabla\psi - \left(\frac{\psi}{u_n}\right)^2 \nabla u_n\right] = \int_\Omega f(\lambda_n, x, u_n)\frac{\psi^2}{u_n}.$$

Entonces, usando la notación

$$g(\lambda_n, x, u_n) := \left[f(\lambda_n, x, u_n) - \lambda_n f'_\infty(x) u_n\right] u_n^{\sigma-1},$$

llegamos a

$$\begin{aligned}\int_\Omega g(\lambda_n, x, u_n)\frac{\psi^2}{u_n^\sigma} &= \int_\Omega \left[A(x,u_n) - \frac{\lambda_n}{\lambda_\infty}A_\infty(x)\right]\nabla\psi\cdot\nabla\psi \\ &-\int_\Omega A(x,u_n)\left(\nabla\psi - \frac{\psi}{u_n}\nabla u_n\right)\cdot\left(\nabla\psi - \frac{\psi}{u_n}\nabla u_n\right).\end{aligned}$$

El hecho que $\lambda_n \geq \lambda_\infty$ conduce, aplicando las condiciones (A_2) y (3.6), a

$$\begin{aligned}0 \;\geq\; &\int_\Omega \left[A(x,u_n) - \frac{\lambda_n}{\lambda_\infty}A_\infty(x)\right]\nabla\psi\cdot\nabla\psi \\ &-\int_\Omega A(x,u_n)\left(\nabla\psi - \frac{\psi}{u_n}\nabla u_n\right)\cdot\left(\nabla\psi - \frac{\psi}{u_n}\nabla u_n\right).\end{aligned}$$

En particular,

$$0 \geq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega g(\lambda_n, x, u_n)\frac{\psi^2}{z_n^\sigma},$$

donde, como anteriormente, $z_n = u_n\|u_n\|^{-1}$. Usando que z_n converge uniformemente a ψ y el Lema de Fatou, obtenemos gracias a (3.6) que

$$0 \geq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega g(\lambda_n, x, u_n)\frac{\psi^2}{z_n^\sigma} \geq \int_\Omega \underline{\mu}(x)\psi^{2-\sigma} > 0,$$

lo cual es una contradicción. □

III.2. Bifurcación desde la solución trivial.

Supondremos durante toda esta sección que se satisfacen las condiciones (A_{1-3}) y $(\tilde{f}_1)$. También suponemos que nuestro problema admite a $u = 0$ como solución trivial; es decir, que la no-linealidad f verifica que $f(\lambda, x, 0) = 0$ a.e. $x \in \Omega$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideraremos además que,

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{f(\lambda, x, s)}{s} = \lambda f'_+(x, 0), \text{ uniformemente en } (\lambda, x) \in \Lambda \times \Omega, \quad (\tilde{f}_4)$$

donde o bien $0 \leq f'_+(x, 0) \in L^r(\Omega)$, $(r > N/2)$, no idénticamente cero y $\Lambda \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado, o bien $f'_+(x, 0) = +\infty$ a.e. $x \in \Omega$ y $\Lambda \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Notemos que $(\tilde{f}_4)$ implica, en el caso $f'_+(x, 0) \in L^r(\Omega)$, la existencia de alguna función positiva $C_1(x) \in L^r(\Omega)$ y $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ verificando

$$|f(\lambda, x, s)| \leq C_1(x)s, \quad \forall s \in (0, \varepsilon_0], \quad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{3.7}$$

Para el caso de pesos $f'_+(x, 0)$ integrables, también impondremos una condición similar a $(\tilde{f}_3)$. Concretamente, suponemos que existe una función positiva $K(x) \in L^r(\Omega)$ $(r > N/2)$, tal que para todo $\lambda, \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$,

$$|f(\lambda, x, s) - f(\overline{\lambda}, x, s)| \leq |\lambda - \overline{\lambda}| K(x)s, \quad \forall s \in (0, \varepsilon_0]. \quad (\tilde{f}'_3)$$

Respecto a la matriz A, observamos que, puesto que sus coeficientes $a_{ij}(x, s)$ son funciones de Carathéodory, existe el límite

$$\lim_{s \to 0^+} A(x, s) = A(x, 0), \text{ a.e. } x \in \Omega. \tag{3.8}$$

Notemos además que en el caso de peso $f'_+(x,0)$ integrable, el problema de autovalores con peso

$$-\mathrm{div}(A(x,0)\nabla u) = \lambda f'_+(x,0)u, \text{ en } \Omega,$$
$$u = 0 \text{ en } \partial\Omega,$$

tiene un primer autovalor positivo $\mu_1(f'_+(x,0))$ y es posible escoger una autofunción asociada $\varphi > 0$ con $\|\varphi\| = 1$. Definimos

$$\lambda_0 = \begin{cases} \mu_1(f'_+(x,0)), & \text{si } f'_+(x,0) \in L^r(\Omega), \\ \\ 0, & \text{si } f'_+(x,0) = \infty. \end{cases} \tag{3.9}$$

Puesto que estamos buscando soluciones positivas podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$f(\lambda, x, s) = f(\lambda, x, 0) = 0, \quad \forall x \in \Omega, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall s < 0.$$

Lema 3.6. *Supongamos que $A(x,s)$ y $f(\lambda,x,s)$ satisfacen las condiciones (A_{1-3}), $(\tilde{f}_1)$, $(\tilde{f}'_3)$, $(\tilde{f}_4)$ y $f(\lambda,x,0) = 0$ a.e. $x \in \Omega$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Consideremos un intervalo compacto $\Lambda \subset (-\infty, \lambda_0)$. Existe $\delta > 0$ tal que*

$$u \neq T(tf(\lambda, x, u))$$

para toda $u \in E$ con $0 < \|u\|_0 \leq \delta$, $\lambda \in \Lambda$ y $t \in [0,1]$.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existen sucesiones $\lambda_n \in \Lambda$, $u_n \in E \setminus \{0\}$ y $t_n \in [0,1]$ tales que $u_n = T(t_n f(\lambda_n, x, u_n))$ con $\lambda_n \to \lambda \in \Lambda$, $\|u_n\|_0 \to 0$ y $t_n \to t_0 \in [0,1]$. Tomando u_n como función test y usando la condición (A_2) obtenemos

$$\alpha\|u_n\|^2 \leq \int_\Omega A(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla u_n = t_n \int_\Omega f(\lambda_n, x, u_n)u_n.$$

Observando que, por $(\tilde{f}_1)$, $\int_\Omega f(\lambda_n, x, u_n)u_n$ converge a cero, deducimos que u_n converge fuertemente a cero en $H_0^1(\Omega)$. Tomando la sucesión normalizada $z_n := u_n\|u_n\|^{-1}$, tenemos que $z_n \geq 0$ y que existe $z \in H_0^1(\Omega)$ tal que pasando a subsucesiones z_n converge débilmente a z en $H_0^1(\Omega)$. La sucesión normalizada z_n verifica la siguiente ecuación

$$\int_\Omega A(x, u_n)\nabla z_n \cdot \nabla v = t_n \int_\Omega \frac{f(\lambda_n, x, u_n)}{\|u_n\|} v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.10}$$

Si $\lambda_0 = 0$, es decir, $f'_+(x, 0) = +\infty$, entonces $\Lambda \subset (-\infty, \lambda_0) = (-\infty, 0)$ y, por $(\tilde{f}_4)$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $f(\lambda_n, x, s) < 0$ a.e. $x \in \Omega$ y para todo $s < \varepsilon_1$, $n \in \mathbb{N}$. Así, tomando $v = z_n$ como función test en (3.10) y usando que $\|u_n\|_0 \leq \varepsilon_1$ para valores grandes de n, deducimos de (A_2) la siguiente contradicción

$$\alpha \leq \int_\Omega A(x, u_n)\nabla z_n \cdot \nabla z_n = t_n \int_\Omega \frac{f(\lambda_n, x, u_n)}{\|u_n\|} z_n \leq 0.$$

Por otra parte, si $\lambda_0 > 0$, por las condiciones (A_{1-2}) y (3.7) y siguiendo los mismos argumentos del Lema 3.1, deducimos que z_n converge fuertemente a z en $H_0^1(\Omega)$. En particular, $z \not\equiv 0$. Concluimos entonces este caso observando que (3.8), $(\tilde{f}'_3)$, $(\tilde{f}_4)$ y (3.7) nos permiten pasar al límite en la ecuación (3.10) y obtener que z verifica

$$-\mathrm{div}(A(x, 0)\nabla z) = t_0\lambda f'_+(x, 0)z, \quad \text{ en } \Omega\,.$$

Puesto que $z \geq 0$, $z \neq 0$ y $f'_+(x, 0) \geq 0$, obtenemos que $t_0\lambda > 0$, más aún, $z = \varphi$ y $t_0\lambda = \lambda_0$, lo cual es también una contradicción. □

Nota 3.7. Como consecuencia del Lema 3.6, deducimos que el problema (P_λ) no tiene puntos de bifurcación de soluciones positivas desde cero en $(-\infty, \lambda_0)$. Incluso más, siguiendo los argumentos de este lema, es posible también probar que no hay ningún otro posible punto de bifurcación desde la línea de soluciones triviales salvo a lo más λ_0.

De forma más precisa podemos probar que si $u_n \neq 0$ es solución del problema (P_{λ_n}) con $\lambda_n \to \lambda \geq \lambda_0$, y $\|u_n\|_0 \to 0$, entonces $\lambda = \lambda_0$. En efecto, como anteriormente la sucesión normalizada $z_n = u_n/\|u_n\|$ satisface (3.10) con $t_n = 1$ y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que z_n converge débilmente a algún $z \geq 0$ en $H_0^1(\Omega)$. Ahora, si $f'_+(x,0)$ es integrable, entonces como en el Lema 3.6, deducimos que z es una solución no trivial del problema

$$-\mathrm{div}\,(A(x,0)\nabla z) = \lambda f'_+(x,0)z.$$

Esto significa que $z = \varphi$ y $\lambda = \lambda_0$.

En el caso de $f'_+(x,0) = +\infty$, consideremos el problema de autovalores

$$-\mathrm{div}\,(A(x,u_n)\nabla v) = \mu v,\ v \in H_0^1(\Omega),$$

y sea $\phi_n > 0$ una función propia normalizada asociada al primer valor propio positivo $\mu_n \equiv \lambda_1(u_n)$. Recordando que μ_n está caracterizado variacionalmente como el ínfimo de

$$\int_\Omega A(x,u_n)\nabla v \cdot \nabla v \Bigg/ \int_\Omega v^2\ ,$$

para $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, deducimos de (A_1) que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n \leq M \equiv \mu\beta$, donde μ denota al primer valor propio del operador Laplaciano con condiciones de Dirichlet cero en la frontera. Así, si $\lambda > 0$, pasando a una subsucesión, podemos suponer por $(\tilde{f}_4)$ que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(\lambda_n, x, u_n(x)) > M u_n(x), \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall n \geq n_0. \tag{3.11}$$

Tomando $v = \phi_n$ como función test en la ecuación que satisface u_n obtenemos

$$\mu_n \int_\Omega u_n \phi_n = \int_\Omega f(\lambda_n, x, u_n)\phi_n > M \int_\Omega u_n \phi_n, \ \forall n \geq n_0,$$

es decir, una contradicción, probando también en este caso que $\lambda = \lambda_0$.

Lema 3.8. *Supongamos que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda, x, 0) = 0$ a.e. $x \in \Omega$ y que se satisfacen las condiciones (A_{1-3}), $(\tilde{f}_1)$, $(\tilde{f}_4)$. Sea $\lambda > \lambda_0$. Entonces, para cualquier función positiva ϕ perteneciente a $L^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ $(r > N/2)$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$u \neq T(f(\lambda, x, u) + \tau\phi),$$

para todo $\tau \geq 0$ y para cada u en E con $0 < \|u\|_0 \leq \delta$.

Demostración. Razonaremos por contradicción suponiendo que existan sucesiones $\tau_n \geq 0$, $u_n \in E \cap H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ con $\|u_n\|_0 \to 0$ tal que

$$-\text{div}(A(x, u_n)\nabla u_n) = f(\lambda, x, u_n) + \tau_n \phi. \tag{3.12}$$

Puesto que τ_n es no negativo, usando u_n^- como función test podemos obtener como en la prueba del Lema 3.3 que $u_n \geq 0$. Primero probamos que en este caso $f'_+(x, 0) \not\equiv +\infty$, es decir, $\lambda_0 > 0$. En otro caso, seguimos los argumentos de la Nota 3.7 y obtenemos que se satisface (3.11) (con $M = \mu\beta \geq \mu_n$). Tomando de nuevo $v = \phi_n$ como función test en la ecuación que satisface u_n obtenemos

$$\begin{aligned} \mu_n \int_\Omega u_n \phi_n &= \int_\Omega f(\lambda_n, x, u_n)\phi_n + \tau_n \int_\Omega \phi\phi_n \\ &> M \int_\Omega u_n \phi_n + \tau_n \int_\Omega \phi\phi_n, \ \forall n \geq n_0, \end{aligned}$$

es decir, una contradicción, probando que $f'_+(x, 0) \not\equiv +\infty$. Ahora consideremos $\phi/\|u_n\|$ como función test en (3.12) para deducir que la sucesión normalizada de u_n, z_n, satisface

$$\int_\Omega A(x,u_n)\nabla z_n \cdot \nabla\phi = \int_\Omega \frac{f(\lambda,x,u_n)}{\|u_n\|}\phi + \frac{\tau_n}{\|u_n\|}\int_\Omega \phi^2.$$

A partir de (3.7), podemos usar el Lema de Fatou y obtener,

$$\begin{aligned}\int_\Omega A(x,0)\nabla z \cdot \nabla\phi - \limsup_{n\to\infty}\frac{\tau_n}{\|u_n\|}\int_\Omega \phi^2 \geq & \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{f(\lambda,x,u_n)}{\|u_n\|}\phi \\ \geq & \lambda\int_\Omega f'_+(x,0)z\phi.\end{aligned}$$

Usando (A_1) y que $f'_\infty(x,0) \in L^r(\Omega)$, deducimos que

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\tau_n}{\|u_n\|}\int_\Omega \phi^2 \leq \beta\int_\Omega |\nabla z||\nabla\phi| - \lambda\int_\Omega f'_+(x,0)z\phi < +\infty,$$

y $\tau_n\|u_n\|^{-1}$ está acotada. Así, existe $\tau^* \geq 0$ tal que, pasando a una subsucesión, $\tau_n\|u_n\|^{-1} \to \tau^*$. Además, existe z en $H_0^1(\Omega)$ tal que $z \geq 0$, y $z_n \rightharpoonup z$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$. Tomando ahora $(z_n - z)/\|u_n\|$ como función test en (3.12) y restando el término integral $\int_\Omega A(x,u_n)\nabla z \cdot \nabla(z_n - z)$, tenemos por (A_2)

$$\begin{aligned}\alpha\|z_n - z\|^2 \leq & -\int_\Omega A(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n - z) + \int_\Omega \frac{f(\lambda,x,u_n)}{\|u_n\|}(z_n - z) \\ & + \frac{\tau_n}{\|u_n\|}\int_\Omega \phi(z_n - z).\end{aligned}$$

Observemos ahora que por (A_1) y el Teorema de inmersión de Sobolev

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega A(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n - z) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \phi(z_n - z) = 0,$$

y por $(\tilde{f}_4)$ y (3.7),

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{f(\lambda,x,u_n)}{\|u_n\|}(z_n - z) = 0.$$

Deducimos por tanto que $z_n \to z$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$, con lo que $z \neq 0$.

Ahora, dividimos (3.12) por $\|u_n\|$, notemos que las condiciones $(\tilde{f}_4)$, (3.7) y (3.8) nos permiten pasar al límite y obtener que z satisface la ecuación

$$-\mathrm{div}\,(A(x,0)\nabla z) = \lambda f_+'(x,0) + \tau^* \phi, \quad x \in \Omega.$$

Tomemos φ como función test. Usando que τ^* y ϕ son positivos, obtenemos que

$$\lambda_0 \int_\Omega f_+'(x,0)\varphi z = \int_\Omega A(x,0)\nabla z \cdot \nabla \varphi \geq \lambda \int_\Omega f_+'(x,0)\varphi z,$$

lo cual es una contradicción ya que $\lambda > \lambda_0$. $\square$

Al igual que en la sección anterior, los dos lemas previos permiten probar un resultado de bifurcación desde la solución trivial para (P_λ). Además, damos condiciones suficientes para asegurar hacia que lado ocurre dicha bifurcación.

Teorema 3.9. *Supongamos que* $f(\lambda, x, 0) = 0$, *a.e.* $x \in \Omega$ *y para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\tilde{f}_1)$, $(\tilde{f}_3')$, $(\tilde{f}_4)$ *y* (A_{1-3}). *Sea* λ_0 *dado por* (3.9). *Entonces* λ_0 *es un punto de bifurcación de* (P_λ) *desde la solución trivial y es el único para soluciones positivas. Más aún, existe un continuo no acotado* Σ_0 *en* Σ *"emanando"de* $(\lambda_0, 0)$. *Además, si* $\lambda_0 > 0$ *y se satisface* (2.4), *se verifican las siguientes conclusiones*

(i) si existen $\varepsilon_0, s_0 > 0$, $\sigma < 0$ *y* $\underline{C}(x) \in L^1(\Omega)$ *tales que denotando* $\underline{\mu}(x) \equiv \liminf_{(\lambda,s)\to(\lambda_0,0^+)} \left[f(\lambda,x,s) - \lambda f_+'(x,0)s\right] s^{\sigma-1}$, *para todo*

$s \in [0, s_0]$ y $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0)$ se verifica

$$\begin{aligned}
&[A(x,s) - A(x,0)] \leq 0, \ \ a.e. \ x \in \Omega, \\
&\big[f(\lambda, x, s) - \lambda f'_+(x,0)s\big]\, s^{\sigma-1} \geq \underline{C}(x), \ \ a.e. \ x \in \Omega, \\
&\int_\Omega \underline{\mu}(x) \varphi^{2-\sigma}(x) > 0,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

entonces la bifurcación de soluciones positivas en $\lambda = \lambda_0$ es subcrítica,

(ii) si existen $\varepsilon_1, s_1 > 0$, $\sigma < 0$ y $\overline{C}(x) \in L^1(\Omega)$ tales que denotando $\overline{\mu}(x) \equiv \limsup_{(\lambda,s)\to(\lambda_0,0^+)} \big[f(\lambda, x, s) - \lambda f'_+(x,0)s\big]\, s^{\sigma-1}$, para todo $s \in [0, s_1]$ y $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon_1, \lambda_0 + \varepsilon_1)$ se verifica

$$[A(x,s) - A(x,0)] \geq 0, \ \ a.e. \ x \in \Omega,$$

$$\big[f(\lambda, x, s) - \lambda f'_+(x,0)s\big]\, s^{\sigma-1} \leq \overline{C}(x), \ \ a.e. \ x \in \Omega,$$

$$\int_\Omega \overline{\mu}(x) \varphi^{2-\sigma}(x) < 0,$$

entonces la bifurcación de soluciones positivas en $\lambda = \lambda_0$ es supercrítica.

Demostración. Consideremos la aplicación $\Phi_\lambda : E \to E$ dada por

$$\Phi_\lambda(u) = u - T(f(\lambda, x, u)), \ u \in E.$$

Primero observamos que aplicando el Lema 3.6 y siguiendo los mismos argumentos del Teorema 3.4 obtenemos que

$$\mathrm{i}(\Phi_\lambda, 0) = 1, \quad \forall\, \lambda < \lambda_0.$$

Sea ahora $0 < \varepsilon \leq \delta$, donde δ es el número dado en el Lema 3.8. Entonces, de este lema y usando la invariancia por homotopía (d_3),

$$\deg(\Phi_\lambda, B_\varepsilon, 0) = \deg(u - T(f(\lambda, x, u) + a\varphi), B_\varepsilon, 0), \ \forall a > 0.$$

Puesto que el Lema 3.8 implica también que el problema

$$u = T(f(\lambda, x, u) + a\varphi), \quad u \in E,$$

no tiene soluciones en $\overline{B}_\delta$, para cada $a > 0$, obtenemos que

$$\deg(u - T(f(\lambda, x, u) + a\varphi), B_\varepsilon, 0) = 0, \quad \forall\, a > 0,$$

probando que

$$\mathrm{i}(\Phi_\lambda, 0) = 0, \quad \forall\, \lambda > \lambda_0.$$

Podemos entonces, usando el Teorema 1.7, concluir la existencia del continuo no acotado Σ_0.

Probaremos ahora la afirmación *(i)*, el item *(ii)* puede ser probado de forma similar. Razonemos por contradicción y consideremos una sucesión de soluciones (λ_n, u_n) con $\lambda_n \geq \lambda_0$, $\lambda_n \to \lambda_0$, $u_n \neq 0$ y $\|u_n\|_0 \to 0$. Como en el Teorema 3.4, por (2.4) podemos tomar como función test $\varphi^2(u_n)^{-1}$ y obtener

$$\int_\Omega (f(\lambda_n, x, u_n) - \lambda_n f'_+(x,0) u_n) \frac{\varphi^2}{u_n} = \int_\Omega \left[A(x, u_n) - \frac{\lambda_n}{\lambda_0} A(x, 0) \right] \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi$$

$$- \int_\Omega A(x, u_n) \left(\nabla\varphi - \frac{\varphi}{u_n} \nabla u_n \right) \cdot \left(\nabla\varphi - \frac{\varphi}{u_n} \nabla u_n \right).$$

Igual que anteriormente, denotemos por z_n a la sucesión normalizada de u_n y recordemos que $z_n \to \varphi$ fuertemente en $H_0^1(\Omega)$. Multiplicando por $\|u_n\|^\sigma$ y teniendo en cuenta la condición (3.13), obtenemos por el Lema de Fatou que

$$0 \geq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{f(\lambda_n, x, u_n) - \lambda_n f'_+(x,0)u_n}{u_n^{1-\sigma}} z_n^{-\sigma}\varphi^2 \geq \int_\Omega \underline{\mu}(x)\varphi^{2-\sigma} > 0,$$

lo cual es una contradicción. □

Nota 3.10. La conclusión del Teorema 3.9-*(ii)* es también cierta en el caso $\lambda_0 = 0$, si imponemos hipótesis adicionales sobre f. Por ejemplo, suponiendo que para algún $p > 1$ y $s_0 > 0$, existe $K_1(x) \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} f(0,x,s) &\leq K_1(x)s^p, \qquad \forall s \in [0, s_0], \\ f(\lambda,x,s) &\leq f(0,x,s), \quad \forall \lambda < 0, \text{ y } s \in [0,s_0], \end{aligned} \tag{3.14}$$

entonces la bifurcación desde $\lambda_0 = 0$ es supercrítica. En efecto, razonemos por contradicción y supongamos que hay una sucesión de soluciones (λ_n, u_n) con $\lambda_n \leq 0$, $\lambda_n \to 0$, $u_n \neq 0$ y $\|u_n\|_0 \to 0$. Tomemos $u_n/\|u_n\|^2$ como función test para obtener

$$\begin{aligned} \int_\Omega A(x,u_n)\nabla z_n \cdot \nabla z_n &= \int_\Omega (f(\lambda_n,x,u_n) - f(0,x,u_n))\frac{z_n}{\|u_n\|} \\ &\quad + \int_\Omega f(0,x,u_n)\frac{z_n}{\|u_n\|}, \end{aligned}$$

donde $z_n = u_n/\|u_n\|$. Por las condiciones (A_2) y (3.14), deducimos por el Lema de Fatou que

$$\alpha \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\{u_n>0\}} \frac{f(0,x,u_n)}{u_n} z_n^2 \leq 0,$$

lo cual es una contradicción, probando nuestra afirmación. Ejemplos de no-linealidades satisfaciendo la condición (3.14) son

$f(\lambda,x,s) = \lambda s^q$, $0 < q$, $(x \in \Omega,\ s \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R})$,

$f(\lambda,x,s) = \lambda s^q + s^p$, $0 < q \leq 1 < p$, $(x \in \Omega,\ s \geq 0,\ \lambda \in \mathbb{R})$.

III.3. Comentarios Finales.

Hemos probado en este capítulo (véase Nota 3.2 y Nota 3.7), tanto en la bifurcación desde infinito como desde cero, que el único posible punto de bifurcación de soluciones positivas para el problema (P_λ) es el primer valor propio para el problema de autovalores con peso (véase [**54**])

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) & = & \mu m(x) u & x \in \Omega, \\ u & = & 0 & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{3.15}$$

donde $A(x) \equiv \lim\limits_{s\to+\infty} A(x,s) = A_\infty(x)$ y $m(x) = f'_\infty(x)$ para la bifurcación desde infinito, o bien $A(x) \equiv \lim\limits_{s\to 0^+} A(x,s) = A(x,0)$ y $m(x) = f'_+(x,0) \not\equiv +\infty$ para la bifurcación desde cero.

Sería interesante plantearnos ahora la existencia de bifurcación de soluciones no necesariamente positivas. Para el estudio de la bifurcación desde infinito, siguiendo el argumento del Lema 3.1, es posible también probar que los únicos posibles puntos de bifurcación desde infinito son los valores propios $\mu_k(m(x))$ del problema (3.15). De forma más precisa, suponiendo que

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(\lambda,x,s)}{s} = \lambda f'_\infty(x), \text{ uniformemente } x \in \Omega.$$

podemos probar que si $u_n \neq 0$ es solución del problema (P_{λ_n}) con $\lambda_n \to \lambda$, y $\|u_n\|_0 \to +\infty$, entonces $\lambda = \mu_k(m(x))$ para algún $k \in \mathbb{N}$. En efecto, en ese caso podemos suponer que la sucesión normalizada $z_n = u_n/\|u_n\|$ converge débilmente a algún $z \neq 0$ en $H_0^1(\Omega)$, de manera que z es una solución no trivial del problema

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla z) = \lambda m(x) z.$$

Esto significa que $\lambda = \mu_k(m(x))$ y $z \in E_k$, subespacio propio asociado a $\mu_k(m(x))$. Análogamente, razonando como en el Lema 3.6 se prueba que los únicos posibles puntos de bifurcación desde cero son los valores propios $\mu_k(m(x))$ del problema (3.15), tomando en este caso $A(x) \equiv \lim_{s\to 0} A(x,s) = A(x,0)$ y $m(x) = f'(x,0) \in L^r(\Omega)$, $r > N/2$ dado por:

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(\lambda,x,s)}{s} = \lambda f'(x,0), \text{ uniformemente } x \in \Omega.$$

Más aún, en los Teoremas 3.4 y 3.9 damos condiciones suficientes que aseguran que el primer autovalor de (3.15) es de hecho el único punto de bifurcación de soluciones positivas para el problema (P_λ), respectivamente desde infinito o desde la solución trivial, (así como condiciones para saber hacia que lado ocurre dicha bifurcación). Sin embargo, en el caso de soluciones no triviales (no necesariamente positivas), no disponemos de condiciones suficientes que aseguren que un determinado valor propio, $\mu_k(m(x))$, sea realmente un punto de bifurcación para el problema (P_λ). En el caso semi-lineal, para la bifurcación desde la solución trivial, es conocido el resultado de Krasnoselskii (véase [**76**]) donde se demuestra que todo valor propio de multiplicidad algebraica impar es un punto de bifurcación desde la línea de soluciones triviales. Usando la propiedad de invariancia por homotopía, (d_3), del grado topológico, creemos que será posible relacionar el problema casi-lineal

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) & = & f(\lambda,x,u), & x \in \Omega\ , \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega\ , \end{array}\right\}$$

con el problema semi-lineal,

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) & = & f(\lambda,x,u), & x \in \Omega\ , \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega\ , \end{array}\right\}$$

donde o bien $A(x) = A_\infty(x)$ o bien $A(x) = A(x,0)$, de manera que sea posible extender los resultados conocidos para este último.

Finalmente, aún no disponiendo de condiciones suficientes para asegurar que un determinado valor propio sea de hecho un punto de bifurcación, es interesante estudiar hacia que lado ocurrirá una posible bifurcación desde el mismo. Por ejemplo, tener condiciones que aseguren que toda posible bifurcación desde infinito ocurre hacia un determinado lado, supone tener condiciones suficientes para determinar la existencia de solución de algunos problemas resonantes en valores propios de orden superior (véase Sección IV.2 para el caso de resonancia con el primer valor propio). A partir de estas condiciones podríamos extender a nuestro ambiente casi-lineal los resultados en [**11, 24, 26, 34, 46, 85, 95**] a este respecto.

Para determinar hacia que lado ocurre toda posible bifurcación dada la sucesión (u_n, λ_n) de soluciones de (P_λ), será determinante encontrar convenientes funciones test que permitan conocer el signo de $(\mu_k(m(x)) - \lambda_n)$ una vez determinado el comportamiento asintótico de una determinada función de la no-linealidad, así como del carácter de la forma cuadrática inducida por la matriz $[A(x, u_n) - A(x)]$. Esto puede resultar tarea complicada, puesto que ya en el caso del primer valor propio necesitábamos imponer condiciones de regularidad fuertes (condición (2.4)) que permitían usar el Lema de Hopf para elegir convenientemente dichas funciones test.

Capítulo IV

Interacción con el espectro en infinito.

IV.1. Problemas que no interactúan con el espectro asintótico.

Como señalabamos en la introducción, la relación entre los valores propios $\{\lambda_k\}$ de (0.2) y el comportamiento asintótico de f es muy importante para el estudio del problema (0.1). En este capítulo, estudiaremos (0.1) para distintos tipos de no-linealidades. Según sea dicha relación, obtendremos resultados de existencia y/o multiplicidad de soluciones. Los principales resultados de este capítulo se encuentran sometidos a publicación en [**22**] y algunos de ellos han sido expuestos en distintos congresos internacionales ([**21**] en Las Palmas de Gran Canaria, *Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, CEDYA*, 1999, y [**46**] en Praga, *Partial Differential Equations*, 1998).

Comenzaremos con un resultado de existencia de soluciones de (0.1) en el caso en que la no-linealidad $f(x,s)$ no interaccione con el espectro de (0.2). El principal hecho para ello será la existencia de una cota *a priori* para la norma en E de toda solución. En efecto, probamos el siguiente

TEOREMA 4.1. *Supongamos que se verifica* (A_{1-4}) *y* (f_{1-2}) *de manera que* $f'_{\pm\infty}(x)$ *verifiquen, a.e.* $x \in \Omega$, *que o bien* $\lambda_k < f'_{\pm\infty}(x) < \lambda_{k+1}$ *para algún* $k \geq 1$ *o bien* $f'_{\pm\infty}(x) < \lambda_1$. *Entonces el problema* (0.1) *tiene al menos una solución.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos el teorema construyendo una homotopía del problema (0.1) a uno semi-lineal. Concretamente, para cada $t \in [0,1]$ consideramos la matriz $A_t(x,u) = tA(x,u) + (1-t)A_\infty(x)$, la cual satisface las hipótesis (A_{1-4}). Sea también la función $f_t(x,s) = tf(x,s) + (1-t)(f'_{+\infty}(x)s^+ + f'_{-\infty}(x)s^-)$. Estudiaremos el problema

$$\left.\begin{array}{rcl} -\mathrm{div}(A_t(x,u)\nabla u) & = & f_t(x,u),\ x \in \Omega\ , \\ u & = & 0,\ x\ \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Puesto que A_t satisface la condición (A_3), existe el inverso compacto $T_t : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ del operador $Q_t(u) \equiv -\mathrm{div}(A_t(x,u)\nabla u)$. De esta forma, el problema anterior es equivalente a encontrar los ceros de

$$\Phi_t(u) \equiv u - T_t(f_t(x,u)) = 0, \quad u \in E.$$

Afirmación: *existe* $R \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $u - T_t(f_t(x,u)) \neq 0$, *para todo* $u \in E$ *con* $\|u\|_0 \geq R$. Supongamos por el contrario que existen $t_n \in [0,1]$ y $u_n \in E \cap H_0^1(\Omega)$ solución del problema anterior para $t = t_n$ y $\|u_n\|_0 \to \infty$. Primero notamos que $z_n = u_n/\|u_n\|$ está acotada, así existe $z \in H_0^1(\Omega)$ tal que, pasando a una subsucesión, z_n converge débilmente a z. Más aún, $z_n \to z$ fuertemente en $L^p(\Omega)$, $p < 2^*$, y $z_n(x) \to z(x)$ a.e. $x \in \Omega$. Junto a esto, z_n verifica

$$\begin{aligned} \int_\Omega A_{t_n}(x,u_n)\nabla z_n \cdot \nabla v &= (1-t_n)\left[\int_\Omega f'_{+\infty}(x) z_n^+ v + \int_\Omega f'_{-\infty}(x) z_n^- v\right] \\ &\quad + t_n \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|} v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Tomando $v = z_n - z$ como función test, restando $\int_\Omega A_t(x,u_n)\nabla z \cdot \nabla(z_n - z)$ y usando la hipótesis (A_2) tenemos

$$
\begin{aligned}
\alpha\|z_n - z\|^2 &\leq \int\limits_\Omega A_{t_n}(x,u_n)\nabla(z_n - z)\cdot\nabla(z_n - z) \\
&= (1-t_n)\int\limits_\Omega \left[f'_{+\infty}(x)z_n^+ + f'_{-\infty}(x)z_n^-\right](z_n - z) + \\
&\quad t_n\int\limits_\Omega \frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|}(z_n - z) - \\
&\quad \int\limits_\Omega A_{t_n}(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n - z).
\end{aligned}
$$

De la convergencia de z_n en $L^p(\Omega)$ $(p < 2^*)$

$$(1-t_n)\left[\int\limits_\Omega f'_{+\infty}(x)z_n^+(z_n - z) + \int\limits_\Omega f'_{-\infty}(x)z_n^-(z_n - z)\right] \to 0.$$

Recordemos que, como en el capítulo anterior, si $\|u_n\|_0$ es no acotada, también lo es $\|u_n\|$, así, usando además (f_1) obtenemos que

$$t_n\int\limits_\Omega \frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|}(z_n - z) \to 0.$$

Ahora, la condición (A_1) y el Teorema de Lebesgue implican la convergencia fuerte de $A_{t_n}(x,u_n)\nabla z$ a $A_\infty(x)\nabla z$ en $L^2(\Omega)$. Puesto que $\nabla(z_n - z)$ converge débilmente a cero en $L^p(\Omega)$ tenemos

$$\int\limits_\Omega A_{t_n}(x,u_n)\nabla z\cdot\nabla(z_n - z) \to 0.$$

Así, deducimos la convergencia fuerte en $H_0^1(\Omega)$ de z_n a z. Para obtener la ecuación que satisface z tomamos límites en la ecuación que satisface z_n. Primero notamos que, razonando como antes

$$\int\limits_\Omega A_{t_n}(x,u_n)\nabla z_n\cdot\nabla v \to \int\limits_\Omega A_\infty(x)\nabla z\cdot\nabla v, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

Por otra parte, puesto que t_n está acotado, usando (f_{1-2}) y el Teorema de Lebesgue deducimos que

$$(1-t_n)\int_\Omega f'_{+\infty}(x)z_n^+v \quad + \quad (1-t_n)\int_\Omega f'_{-\infty}(x)z_n^-v +$$

$$t_n\int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{\|u_n\|}v \quad \to \quad \int_\Omega f'_{+\infty}(x)z^+v + \int_\Omega f'_{-\infty}(x)z^-v.$$

Entonces, la ecuación satisfecha por z es

$$\int_\Omega A_\infty(x)\nabla z\cdot\nabla v = \int_\Omega f'_{+\infty}(x)z^+v + \int_\Omega f'_{-\infty}(x)z^-v, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega).$$

Denotando $m(x) = f'_{-\infty}(x)\chi_{\{z\leq 0\}} + f'_{+\infty}(x)\chi_{\{z>0\}}$, la ecuación anterior implica que 1 es valor propio del problema de valores propios con pesos

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A_\infty(x)\nabla u) & = & \mu m(x)u & x\in\Omega, \\ u & = & 0 & x\in\partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

es decir, $1 = \mu_j(m(x))$ para algún $j\in\mathbb{N}$. Por hipótesis, a.e. $x\in\Omega$, o bien $m(x)<\lambda_1$ o bien $\lambda_k < m(x) < \lambda_{k+1}$ para $k\geq 1$. Así, se sabe (véase [**54**, Proposition 1.12 A]) que o bien

$$\mu_j(m(x)) > \mu_j(\lambda_1) = \frac{\lambda_j}{\lambda_1},$$

o bien

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_{k+1}} = \mu_j(\lambda_{k+1}) < \mu_j(m(x)) < \mu_j(\lambda_k) = \frac{\lambda_j}{\lambda_k}.$$

En el primer caso tenemos que $\lambda_1 > \lambda_j$ y en el segundo que $\lambda_k < \lambda_j < \lambda_{k+1}$. Esto es una contradicción en ambos casos, lo que prueba nuestra afirmación.

En virtud de la afirmación anteriormente probada y la propiedad de invariancia por homotopía (d_3), deducimos que el grado de Leray-Schauder

$$\deg(\Phi_t, B_R(0), 0) = \text{ constante},$$

donde $B_R = \{u \in E \,/\, \|u\|_0 < R\}$ es la bola abierta de radio R, $R > 0$. Para $t = 0$ podemos calcular el grado anterior y mostrar que es distinto de cero. En efecto, puesto que $f'_{\pm\infty}(x)$ no interactúa con el espectro de (0.2) entonces 1 no es valor propio de $T_0(f'_{+\infty}u^+ + f'_{-\infty}u^-)$ y en [**76**] está probado que

$$\deg(\Phi_0, B_R(0), 0) = (-1)^\nu,$$

donde ν es la suma de las multiplicidades algebráicas de los valores propios μ del operador compacto $T_0(f'_{+\infty}(x)u^+ + f'_{-\infty}(x)u^-)$ con $1 < \mu$. Consecuentemente, para $t = 1$

$$\deg(\Phi_1, B_R(0), 0) \neq 0,$$

es decir (0.1) tiene al menos una solución $u \in E \cap H_0^1(\Omega)$ con $\|u\|_0 < R$.

$\square$

IV.2. Problemas resonantes para operadores casi-lineales.

Estamos interesados en esta sección con el estudio de cierto problema resonante. Concretamente, sea $m(x) \in L^r(\Omega)$, con $\text{meas}\{m(x) > 0\} > 0$, $r > N/2$. En ese caso podemos considerar $\mu_1(m(x))$ el primer valor propio positivo (véase [**54**]) asociado al problema (4.1).

$$\left.\begin{array}{rcll} -\text{div}(A(x,u)\nabla u) &=& \mu_1(m(x))m(x)u + g(x,u), & x \in \Omega, \\ u &=& 0 & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

Este problema se puede estudiar por medio de la teoría de bifurcación si lo vemos incluido en el problema uniparamétrico

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) & = & \lambda m(x)u + g(x,u) & x\in\Omega, \\ u & = & 0 & x\in\partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

del cual es un caso particular tomando $\lambda = \mu_1(m(x))$. Hemos de hacer notar que la afirmación probada en el teorema anterior (con $f'_{+\infty}(x) = f'_{-\infty}(x) \equiv \lambda m(x)$) significa que $\mu_k(m(x))$ son los únicos posibles puntos de bifurcación desde infinito para el problema (4.3). En dicho teorema se prueba además que (4.3) admite al menos una solución para cada $\lambda \neq \mu_k(m(x))$, $k \in \mathbb{N}$.

Extenderemos las técnicas de [**26**, Theorem 19] a este tipo de operadores casi-lineales. La idea aquí será analizar cuidadosamente hacia que lado ocurren las posibles bifurcaciones desde infinito en $\mu_1(m(x))$. Denotemos por ψ a una función propia positiva asociada a $\mu_1(m(x))$ con $\|\psi\| = 1$. Concretamente, usando los resultados de bifurcación desde infinito de la primera sección del capítulo anterior, probamos el siguiente teorema.

Teorema 4.2. *Supongamos que $m(x)^+ \not\equiv 0$, se satisfacen las condiciones (A_{1-4}) y los coeficientes de la matriz $A_\infty(x)$ son funciones de clase $C^1(\overline{\Omega})$. Supongamos además satisfecha la condición* (2.4) *con $f(x,s) = \lambda m(x)s + g(x,s)$, $s \in \mathbb{R}$. Si existen $\varepsilon_0 > 0$, $r > N$, $\sigma \in (0, 3 - \frac{1}{r})$ y $C \in L^r(\Omega)$ tales que*

$$|g(x,s)||s|^{\sigma-1} \leq C(x), \, a.e. \; x \in \Omega, \, \forall s \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{s\to\pm\infty} [g(x,s)]\,|s|^{\sigma-1} = \rho_{\pm\infty}(x), \;\; a.e. \; x \in \Omega.$$

$$\lim_{|s|\to\infty} g(x,s)s^{-1} = 0, \quad \textit{uniformemente en } \Omega.$$

El problema resonante (4.2) *tiene al menos una solución, siempre que se verifique una de las siguientes condiciones; o bien*

$$\left.\begin{aligned} &[A(x,s) - A_\infty(x)] \leq 0, \quad a.e.\ x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \\ &\int_\Omega \rho_{+\infty}(x)\psi^{2-\sigma}(x) > 0 > \int_\Omega \rho_{-\infty}(x)\psi^{2-\sigma}(x), \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

o bien

$$\left.\begin{aligned} &[A(x,s) - A_\infty(x)] \geq 0, \quad a.e.\ x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \\ &\int_\Omega \rho_{+\infty}(x)\psi^{2-\sigma}(x) < 0 < \int_\Omega \rho_{-\infty}(x)\psi^{2-\sigma}(x). \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

NOTAS 4.3.
(1) Notemos que en el caso semi-lineal, las condiciones (4.4) y (4.5) para $\sigma = 1$ y $r = \infty$ son en realidad las condiciones clásicas de Landesman-Lazer (véase [**77**, p. 611]). Para $\sigma \in (0, 3-1/q)$ general, la condición de la desigualdad integral en (4.4) y (4.5) aparece en [**26**, Theorem 3 and Theorem 4].
(2) Tenemos que notar también que la regularidad de f en (2.4) es una condición técnica para obtener que si $u_n \in E \cap H_0^1(\Omega)$ es una sucesión no acotada de soluciones de (4.3) para $\lambda = \lambda_n$ y $\lambda_n \to \lambda$, pasando a subsucesiones, $u_n/\|u_n\|$ converge a $\pm\psi$ en $C_0^1(\overline{\Omega})$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos en primer lugar que, por la Nota $2.3 - 2$, si se verifica (2.4), tenemos que $T(f(x,u)) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ para cada $u \in E$. Afirmamos ahora que *es bastante probar que toda posible bifurcación desde* $(\mu_1(m(x)), \infty)$ *para el problema* (4.3) *ocurre siempre a la izquierda (respectivamente a la derecha).* En efecto, en ese caso usando el Teorema 4.1 podemos tomar u_n solución de (4.3) para $\lambda = \lambda_n$ con $\mu_1(m(x)) < \lambda_n$ y $\lambda_n \to \mu_1(m(x))$ (respect. $\lambda_n < \mu_1(m(x))$). Puesto que toda posible bifurcación es a la izquierda, tenemos que existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|u_n\|_0 \leq M$, y de la compacidad de T, existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que pasando a una subsucesión, u_n converge fuertemente a u, siendo ésta una solución de (4.3) para $\lambda = \mu_1(m(x))$, es decir, u es solución de (4.2), probando el teorema.

Siguiendo las pautas del Teorema 3.4 probaremos que la condición (4.4) implica que la bifurcación ocurre a la izquierda (análogamente (4.5) implica que ocurre a la derecha). Razonemos por contradicción y tomemos una sucesión $(\lambda_n, u_n) \in \mathbb{R} \times E \cap H_0^1(\Omega)$ verificando

$$\int\limits_\Omega A(x, u_n)\nabla u_n \cdot \nabla v = \lambda_n \int\limits_\Omega m(x) u_n v + \int\limits_\Omega g(x, u_n) v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

con $\lambda_n \to \mu_1(m(x))$, $\lambda_n \geq \mu_1(m(x))$ y $\|u_n\|_0 \to \infty$.

Por (2.4) y la prueba del Teorema 4.1 sabemos que $z_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ converge en $C_0^1(\overline{\Omega})$ a ψ o $-\psi$. Así, pasando a subsucesiones, toda solución u_n pertenece al interior $\mathring{P}$ del cono P de funciones positivas en $C_0^1(\overline{\Omega})$ o a $-\mathring{P}$. Así, tomando $v = \psi^2/u_n$ como función test en la ecuación anterior y razonando como en la demostración del item *(i)* del Teorema 3.4 obtenemos que, si $z_n \to \psi$,

$$0 \geq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g(x, u_n) u_n^{\sigma-1} \frac{\psi^2}{z_n^\sigma} \geq \int\limits_\Omega \rho_{+\infty}(x) \psi^{2-\sigma} > 0,$$

y, si $z_n \to -\psi$,

$$0 \geq \liminf_{n\to\infty} -\int\limits_\Omega g(x, u_n)|u_n|^{\sigma-1} \frac{\psi^2}{|z_n|^\sigma} \geq -\int\limits_\Omega \rho_{-\infty}(x) \psi^{2-\sigma} > 0.$$

En ambos casos llegamos a una contradicción con (4.4), probando nuestra afirmación, y por consiguiente el teorema. $\square$

IV.3. Problemas del tipo Ambrosetti-Prodi.

Estamos interesados en esta sección en el problema de existencia y multiplicidad de solución de (Q_t) para diferentes tipos de nolinealidades f. Para ser más precisos, estudiamos el caso de una función f verificando (f_{1-3}) (f interactúa con el primer valor propio de (0.2)). Consideraremos también el caso de funciones f interactuando con todo el espectro de (0.2), es decir, f satisface (f_2), (f_3') y (f_4) para alguna función $h(x) \in L^\infty(\Omega)$.

La herramienta principal será el método de sub y super-solución y el grado topológico de Leray-Schauder. También serán útiles algunas cotas *a priori* sobre t y sobre la norma en E de las posibles soluciones. En este sentido será de utilidad la siguiente extensión de la estima *a priori* de Gidas y Spruck [**68**].

TEOREMA 4.4. *Supongamos que se verifica* (2.4) *y las condiciones* (A_{1-3}), $(f_{2,4})$, *con* $h \in L^\infty(\Omega)$. *Existe* $C > 0$ *tal que toda solución positiva* $u \in E \cap C^1(\overline{\Omega})$ *de*

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) & = & f(x,u) & x \in \Omega, \\ u & = & c & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

satisface

$$u(x) \leq C, \ \forall x \in \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. La prueba sigue la línea de aquella de [**68**] con pocos cambios elementales. Notemos en esta prueba por $\mathcal{B}_R(x)$ a una bola en $\mathbb{R}^N$ centrada en $x \in \mathbb{R}^N$ de radio $R > 0$. Razonemos por contradicción y supongamos que $u_n \in E \cap C^1(\overline{\Omega})$ sea una sucesión de soluciones positivas del problema anterior y sea $P_n \in \Omega$ tal que:

$$M_n = \sup_{\Omega} u_n(x) = u_n(P_n) \to +\infty.$$

Entonces, pasando a una subsucesión, podemos suponer que

$$P_n \to P \in \overline{\Omega}.$$

Dividimos la prueba en dos pasos, en el primero suponemos que $P \in \Omega$, mientras que en el segundo desarrollamos el caso $P \in \partial\Omega$. En ambos casos, obtendremos una contradicción.

Paso 1. Supongamos que $P \in \Omega$. Sea $2d = \mathrm{dist}(P, \partial\Omega) > 0$, $\mu_n = M_n^{\frac{1-p}{2}}$ y

$$v_n(y) = \mu_n^{\frac{2}{p-1}} u_n(\mu_n y + P_n), \quad \text{para todo} \quad y \in \mathcal{B}_{\frac{d}{\mu_n}}(0). \tag{4.6}$$

Observemos que $\mu_n \to 0$,

$$\sup_{y \in \mathcal{B}_{\frac{d}{\mu_n}}(0)} v_n(y) = v_n(0) = 1,$$

y v_n satisface la siguiente ecuación en $\mathcal{B}_{\frac{d}{\mu_n}}(0)$

$$-\mathrm{div}(A(\mu_n y + P_n, \mu_n^{\frac{-2}{p-1}} v_n(y))\nabla v_n) = \mu_n^{\frac{2p}{p-1}} f(\mu_n y + P_n, \mu_n^{\frac{-2}{p-1}} v_n(y)). \tag{4.7}$$

Por (f_4), usando que $\mu_n \to 0$, la parte derecha de esta ecuación satisface

$$\lim_{n\to\infty} \left| \mu_n^{\frac{2p}{p-1}} f\left(\mu_n y + P_n, \mu_n^{\frac{-2}{p-1}} v_n(y)\right) - h(\mu_n y + P_n) v_n(y)^p \right| = 0.$$

Aplicando el Teorema 9.15 de [**69**], obtenemos para cada natural n que $v_n \in W^{2,s}(\mathcal{B}_{\frac{d}{\mu_n}}(0))$, $s > 1$. Fijemos ahora $R > 0$ y sea n_0 un entero positivo tal que $R < d/\mu_n$ para todo $n \geq n_0$. Para cada $R' \in (R, d/\mu_n)$ sabemos del Teorema 9.11 de [**69**] que

$$\|v_n\|_{W^{2,s}(\mathcal{B}_R(0))} \leq C\left(\|v_n\|_{L^s(\mathcal{B}_{R'}(0))} + \|g_n\|_{L^s(\mathcal{B}_{R'}(0))}\right),$$

donde C es una constante positiva que depende solamente de N, p, α, β y R', y donde

$$g_n(y) = \mu_n^{\frac{2p}{p-1}} f\left(\mu_n y + P_n, \mu_n^{\frac{-2}{p-1}} v_n(y)\right).$$

Teniendo en cuenta que

$$\|v_n\|_{L^s(\mathcal{B}_{R'}(0))} + \|g_n\|_{L^s(\mathcal{B}_{R'}(0))} \leq C_1 = C_1(R'),\ \forall n \geq n_0,$$

encontramos una cota uniforme para $\|v_n\|_{W^{2,s}(\mathcal{B}_R(0))}$ para todo $n \geq n_0$. Eligiendo s suficientemente grande, obtenemos por el Teorema de Morrey que $\|v_n\|_{C^{1,\beta}(\overline{\mathcal{B}_R(0)})}$ está uniformemente acotada. Por lo tanto podemos aplicar el Teorema de Ascolí-Arzelá y deducir la existencia de una función $v \in C^0(\overline{\mathcal{B}_R(0)})$ tal que -pasando a parciales- $v_n \to v$ en $C^0(\overline{\mathcal{B}_R(0)})$ y $h(\mu_n y + P_n) \to \nu$, para algún $\nu > 0$. Necesariamente, tenemos que $v(0) = 1$ y

$$-\operatorname{div}(A_\infty(P)\nabla v) = \nu v^p,\ \text{en } \mathcal{B}_R(0).$$

Entonces, usando de nuevo los teoremas de regularidad, para $\tau \in (0,1)$, $v \in C^{1,\tau}(\overline{\mathcal{B}_R(0)})$. De la arbitrariedad de $R > 0$ deducimos que v está definido en $\mathbb{R}^N$ y es una solución, después de rotar y escalar las coordenadas, de

$$\left.\begin{array}{rcl} -\Delta v(x) &=& v^p(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ v(0) &=& 1. \end{array}\right\}$$

Esto contradice el Teorema 1.2 de [**68**].

Paso 2. Supongamos ahora que $P \in \partial\Omega$. En ese caso, puesto que $\partial\Omega$ es suave, podemos suponer que todo entorno de P está contenido en el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$ y que cerca de P la frontera de Ω está contenida en el hiperplano $x_N = 0$. Sea $d_n = \operatorname{dist}(P_n, \partial\Omega) = P_n \cdot e_n$, ($e_n = (0, \ldots, 0, 1)$), y observemos que la función v_n dada por (4.6) está bien definida en $\Omega_n \equiv \mathcal{B}_{\frac{\delta}{\mu_n}}(0) \cap \{y_N > -d_n/\mu_n\}$, para algún $\delta > 0$. Más aún, satisface (4.7) en Ω_n. Por regularidad elíptica hasta la frontera, (véase [**69**, Theorem 9.13 y Theorem 9.15]) y el Teorema de Morrey, tenemos de nuevo que $|\nabla v_n|$ está uniformemente acotada en Ω_n. Consecuentemente,

$$1 - \mu_n^{\frac{2}{p-1}} c = \left| v_n(0) - v_n\left(-\frac{d_n}{\mu_n} e_n\right) \right| \le C \frac{d_n}{\mu_n},$$

es decir, d_n/μ_n está lejos de cero. Si, para una subsucesión, $d_n/\mu_n \to \infty$, podemos aplicar argumentos similares a los del *Paso* 1 para llegar a una contradicción con el Teorema 1.2 de [**68**].

Por otra parte, si d_n/μ_n está acotado superiormente, suponemos, pasando a una subsucesión si fuese necesario, que $d_n/\mu_n \to s > 0$. Puesto que v_n satisface (4.7) en Ω_n, de nuevo por [**69**, Theorem 9.15], para todo $R, \varepsilon > 0$, obtenemos una cota uniforme para v_n en el espacio $C^{1,\tau}(\mathcal{B}_R(0) \cap \{y_N > -s + \varepsilon\})$ para n suficientemente grande. Por lo tanto, pasando a subsucesiones, deducimos que $v_n \to v$ en $C^1(\mathcal{B}_R(0) \cap \{y_N > -s + \varepsilon\})$, $h(\mu_n y + P_n) \to \nu$, para algún $\nu > 0$, y, usando que R y ε eran arbitrarios, v es una solución de

$$\left.\begin{array}{c} -\operatorname{div}(A_\infty(P)\nabla v) = \nu v^p, \quad \{y_N > -s\}, \\ v(y) = 0, \quad \{y_N = -s\}, \\ v(0) = 1. \end{array}\right\}$$

La contradicción se sigue ahora del Teorema 1.3 de [**68**] después de una transformación lineal y un re-escalamiento de coordenadas. □

LEMA 4.5. *Supongamos que se verifican* $(A_{1,2,4})$. *Supongamos además que; o bien*

(i) *se satisfacen la condiciones* (f_{1-3}),

o bien

(ii) *se verifican* (A_3), (2.4), (f_2), (f_3'), (f_4), *con* $h \in L^\infty(\Omega)$ *y para ciertas constantes positivas* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$,

$$|f(x,s)| \le c_1|s| + c_2, \quad a.e.\ x \in \Omega,\ \forall\, s \in \mathbb{R}^-. \qquad (f_1')$$

Entonces las soluciones de (Q_t) están uniformemente acotadas en conjuntos compactos de t, es decir, para cada intervalo compacto $\Gamma \subset \mathbb{R}$, existe $c \in \mathbb{R}$ de manera que toda solución $u \in E$ de (Q_t) con $t \in \Gamma$ satisface

$$|u(x)| \leq c, \ \forall x \in \Omega.$$

Demostración. Comenzaremos con la prueba en el caso que se satisfagan las condiciones del item *(i)*. Supongamos por el contrario que u_n es una solución de (Q_{t_n}) con t_n acotada y $\|u_n\|_0 \to \infty$. Usando que $t_n/\|u_n\|$ converge a cero y argumentos similares a los de la prueba del Teorema 4.1 deducimos que $z_n = u_n/\|u_n\|$ converge fuertemente a una solución $z \in H_0^1(\Omega)$ de (4.1) con $1 = \mu$ $(m(x) = f'_{-\infty}(x)\chi_{\{z\leq 0\}} + f'_{+\infty}(x)\chi_{\{z>0\}})$. Esto significa que 1 es un valor propio para este problema de valores propios con peso. Sin embargo, nosotros afirmamos que *esto es una contradicción porque $\mu = 1$ no es valor propio de este problema.* En efecto, puesto que $m(x) < \lambda_2$ a.e. $x \in \Omega$, se sabe (véase [**54**, Proposition 1.12 A]) que

$$\mu_j(m(x)) > \mu_j(\lambda_2) = \frac{\lambda_j}{\lambda_2}.$$

Así, $\mu_j(m(x)) > 1$ para todo $j \geq 2$. Por lo tanto si $\mu = 1$ fuese un valor propio, sería $\mu_1(m(x)) = 1$. Usando que la función propia asociada al primer valor propio no cambia de signo obtendríamos que o bien $m(x) \equiv f'_{-\infty}(x)$ o bien $m(x) \equiv f'_{+\infty}(x)$. En el primer caso tendríamos que

$$1 = \mu_1(m(x)) = \mu_1(f'_{-\infty}(x)) > \mu_1(\lambda_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1} = 1.$$

Similarmente, tendríamos $1 = \mu_1(m(x)) = \mu_1(f'_{+\infty}(x)) < 1$ en el otro caso. De cualquier forma alcanzaríamos una contradicción, probando que $\mu = 1$ no es valor propio de (4.1) y por consiguiente el lema en el caso del item *(i)*.

En el segundo caso, cuando se verifican las condiciones del item *(ii)*, dividiremos la prueba en dos pasos. En el paso 1 probaremos que toda solución de (Q_t) está inferiormente acotada. El segundo paso estará dedicado a probar que también son superiormente acotadas. Sea u una solución de (Q_t) con $t \in \Gamma$. Denotaremos durante toda la prueba por c, a una constante positiva independiente de t y de u, la cual puede cambiar de un paso a otro.

Paso 1. Primero probamos la existencia de una cota uniforme para la norma en $H_0^1(\Omega)$ de la parte negativa de las soluciones de (Q_t). En efecto, tomemos $v = u^-$ como función test en la ecuación que satisface u. Por (A_1) tenemos que

$$\alpha \|u^-\|^2 \leq \int_\Omega A(x,u)\nabla u \nabla u^- = \int_\Omega f(x,u)u^- + t\int_\Omega \varphi u^-.$$

Notemos que de (f_1') y (f_3') obtenemos que

$$f(x,s) \geq \overline{c}_1 s - \overline{c}_2, \quad \text{a.e. } x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R}^-,$$

con $\overline{c}_1 < \alpha\mu$. Así deducimos, usando las desigualdades de Poincaré y Cauchy-Schwartz, que

$$\alpha \|u^-\|^2 \leq \overline{c}_1 \int_\Omega |u^-|^2 + \overline{c}_2 \int_\Omega |u^-| + |t| \int_\Omega \varphi |u^-| \leq \frac{\overline{c}_1}{\mu_1}\|u^-\|^2 + c_3\|u^-\|,$$

donde, puesto que $t \in \Gamma$, podemos tomar $c_3 = \frac{1}{\sqrt{\mu}}(\|\varphi\|_2 \sup \Gamma + \overline{c}_2|\Omega|)$. Por lo tanto, $\|u^-\| \leq \dfrac{c_3\mu}{\alpha\mu - \overline{c}_1}$. Es decir, acabamos de probar que la parte negativa de toda solución u de (Q_t) es acotada en $H_0^1(\Omega)$ (y por tanto en $L^{2^*}(\Omega)$) por una constante independiente de u y uniforme en conjuntos acotados de t.

El siguiente paso será encontrar una estima de este tipo para $\|u^-\|_0$. Para ello, consideremos para cada $k \in \mathbb{R}^+$ la función G_k dada por

$$G_k(s) = \begin{cases} s+k & s \leq -k, \\ 0 & -k < s \leq k, \\ s-k & s > k. \end{cases}$$

Así, tomando $v = G_k(u^-)$ como función test en la ecuación que satisface u y usando (A_2) obtenemos que

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u^-)|^2 \leq \int_\Omega A(x,u^-)\nabla G_k(u^-) \cdot \nabla G_k(u^-),$$

y como $\int_\Omega A(x,u^-)\nabla G_k(u^-) \cdot \nabla G_k(u^-) = \int_\Omega A(x,u)\nabla u \cdot \nabla G_k(u^-)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u^-)|^2 &\leq \int_\Omega A(x,u)\nabla u \cdot \nabla G_k(u^-) \\ &= \int_{\Omega_k} (f(x,u^-) + t\varphi) G_k(u^-) \end{aligned}$$

donde $\Omega_k \equiv \{x \in \Omega : \ u(x) < -k\}$. Teniendo en cuenta que existe una constante positiva c tal que

$$|f(x,s) + t\varphi| < c|s|, \, \forall s \leq -k,$$

deducimos de lo anterior que

$$\alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u^-)|^2 \leq c \int_{\Omega_k} |u^-||G_k(u^-)|.$$

Usando ahora las desigualdades de Sobolev y Hölder obtenemos que para $r > 2N/(N+2)$

$$\|G_k(u^-)\|_{2^*}^2 \leq c\|u^-\|_r \|G_k(u^-)\|_{2^*} (\text{meas } \Omega_k)^{(1-1/r-1/2^*)}.$$

Notemos ahora que, para cada $h \geq k$, $|G_k(u^-)| \geq h - k$ en Ω_h, esto implica que

$$(h-k)(\text{meas } \Omega_h)^{1/2^*} \leq c\|u^-\|_r (\text{meas } \Omega_k)^{(1-1/r-1/2^*)},$$

o equivalentemente

$$\text{meas } \Omega_h \leq \frac{c\|u^-\|_r^{2^*} (\text{meas } \Omega_k)^{(2^*-1-2^*/r)}}{(h-k)^{2^*}}.$$

Por lo tanto, podemos aplicar el Lema de Stampacchia para deducir que:

i) si $r > N/2$ entonces $u^- \in L^\infty(\Omega)$ y $\|u^-\|_0 \leq c\|u^-\|_r$,
ii) si $r = N/2$ entonces $u^- \in L^s(\Omega)$ para $s \in [1,\infty)$ y $\|u^-\|_s^s \leq c + c'\|u^-\|_r^s$,
iii) si $r < N/2$ entonces $u^- \in L^s(\Omega)$ para $s = \frac{2^* r}{(2-2^*)r+2^*} - \delta$ y $\delta > 0$ arbitrariamente pequeño. Además, $\|u^-\|_s^s \leq c + c'\|u^-\|_r^{\frac{2^* r}{(2-2^*)r+2^*}}$.

Puesto que $u \in L^{2^*}(\Omega)$ y $2^* > 2N/(N+2)$, podemos razonar como antes para $r_0 = 2^*$. Así, si $N < 6$ concluimos por el item i). En el caso $N = 6$ usamos el item ii) para tomar $r_1 > N/2$ y después de repetir el argumento poder concluir de nuevo por el item i). Finalmente, en el caso $N > 6$ podemos tomar

$$r_1 = \frac{2^* r_0}{(2-2^*)r_0 + 2^*} - \delta_1 > r_0.$$

Como antes, si $r_1 \geq N/2$ concluimos fácilmetne. En otro caso tomamos

$$r_2 = \frac{2^* r_1}{(2-2^*)r_1 + 2^*} - \delta_2.$$

Iterando el argumento, podemos concluir después de un número finito de pasos. En efecto, en otro caso, tendríamos que r_n está acotada, siendo r_n definida de forma recurrente por

$$\begin{cases} r_0 = 2^* \\ r_{n+1} = \dfrac{2^* r_n}{(2-2^*)r_n + 2^*} - \delta_{n+1}. \end{cases}$$

donde $\lim \delta_n = 0$. Más aún, r_n es creciente y por lo tanto convergente y su límite $r \in (2^*, N/2]$ satisface

$$r = \frac{2^* r}{(2-2^*)r + 2^*},$$

es decir, $2^* r = (2-2^*)r^2 + 2^* r$, con lo que $r = 0$, lo cual es una contradicción que prueba nuestra afirmación.

Las estimas sobre la norma de u^- en $L^p(\Omega)$ de los apartados ii) y iii) permiten reducirse, en el esquema iterativo anterior, a una estima en $L^{2^*}(\Omega)$. Esto permite, a partir de i), obtener en el último paso:

$$\|u^-\|_0 \leq c.$$

Paso 2. Supongamos (*Paso* 1) que $|u^-| \leq c$, denotemos $v = u + c \geq 0$, $\tilde{f}(x,s) = f(x, s-c)$ y $\tilde{A}(x,s) = A(x, s-c)$. Así, v satisface

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(\tilde{A}(x,v)\nabla v) & = & \tilde{f}(x,v) + t\varphi & x \in \Omega, \\ v & = & c & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Puesto que estamos en las hipótesis del teorema anterior, podemos asegurar la existencia de $\tilde{c} \in \mathbb{R}^+$ tal que $v(x) \leq \tilde{c}$, $\forall x \in \Omega$, es decir, u es acotada superiormente. $\square$

Denotemos por ϕ a la solución del problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A_\infty(x)\nabla u) & = & \varphi & x \in \Omega, \\ u & = & 0 & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Inspirados por alguna ideas contenidas en el trabajo de McKenna-Walter [**86**] probamos el siguiente lema.

LEMA 4.6. *Supongamos que se satisfacen* (A_{1-4}), (f_{1-3}) *con* $r > N$ *y que los coeficientes de la matriz* $A_\infty(x)$ *sean de clase* $C^1(\overline{\Omega})$. *Para cada* $0 < \varepsilon < \sqrt{\mu}\frac{\lambda_1^2\|\phi\|_2^2}{\lambda_2\|\varphi\|_2+\lambda_1^2\|\phi\|_2}$ *existe* $t_\varepsilon \in \mathbb{R}$ *de manera que para cada* $t < t_\varepsilon$ *y* $\lambda \in [0,1]$, *el problema*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}((\lambda A(x,u) + (1-\lambda)A_\infty(x))\nabla u) &= \lambda f(x,u) + t\varphi \qquad x \in \Omega, \\ u &= 0 \qquad\qquad\qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

no tiene solución en $\partial B_{|t|\varepsilon}(t\phi) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \|u - t\phi\| = |t|\varepsilon\}$.

DEMOSTRACIÓN. Razonamos por contradicción y suponemos que existan sucesiones $t_n \in \mathbb{R}$ con $t_n \to -\infty$, $\lambda_n \in [0,1]$ (pasando a parciales podemos suponer que $\lambda_n \to \lambda \in [0,1]$) y $u_n \in H_0^1(\Omega)$ con $\|\frac{u_n}{t_n} - \phi\| = \varepsilon$, satisfaciendo

$$-\operatorname{div}((\lambda_n A(x,u_n) + (1-\lambda_n)A_\infty(x))\nabla u_n) = \lambda_n f(x,u_n) + t_n\varphi.$$

Puesto que $\|\frac{u_n}{t_n} - \phi\| = \varepsilon$, podemos deducir que $z_n = \frac{u_n}{t_n}$ está acotada. Incluso sabemos que $\|u_n\|_0 \to \infty$, ya que en otro caso $z_n \to 0$ y así $0 \in B_\varepsilon(\phi)$ lo cual es imposible puesto que de la desigualdad de Poincaré deducimos

$$\begin{aligned} \varepsilon < \sqrt{\mu}\|\phi\|_2 \frac{\lambda_1^2\|\phi\|_2}{\lambda_2\|\varphi\|_2 + \lambda_1^2\|\phi\|_2} &\leq \sqrt{\mu}\|\phi\|_2 \\ \text{(desigualdad de Poincaré)} &\leq \|\phi\|. \end{aligned}$$

Por otra parte existe $z \in H_0^1(\Omega)$ tal que (pasando a subsucesión) $z_n \to z$ débilmente en $H_0^1(\Omega)$, fuertemente en $L^2(\Omega)$ y $z_n(x) \to z(x)$ a.e. $x \in \Omega$. Razonando como en el Teorema 4.1 deducimos la convergencia fuerte de z_n a z. Consecuentemente $\|z - \phi\| = \varepsilon$.

Dividiendo por t_n la ecuación que satisface u_n y tomando límites deducimos de (A_4) y (f_3) que z satisface la siguiente ecuación

$$-\operatorname{div}(A_\infty(x)\nabla z) = \lambda m(x)z + \varphi,$$

donde $m(x) = f'_{-\infty}(x)\chi_{\{z<0\}} + f'_{+\infty}(x)\chi_{\{z\geq 0\}}$. Afirmamos ahora que *$z$ es no negativa.* En efecto, esto es consecuencia de tomar z^- como función test en la ecuación que satisface z para obtener de (f_3) que

$$\begin{aligned}\lambda_1\|z^-\|_2^2 &\leq \int_\Omega A_\infty(x)\nabla z\cdot\nabla z^- = \lambda\int_\Omega m(x)(z^-)^2 + \int_\Omega \varphi z^- \\ &= \lambda\int_\Omega f'_{-\infty}(x)(z^-)^2 + \int_\Omega \varphi z^- < \lambda\lambda_1\|z^-\|_2^2\end{aligned}$$

lo que implica que $z^- \equiv 0$, probando así la afirmación.

Como consecuencia directa de la afirmación anterior tenemos que $m(x) = f'_{+\infty}(x)$.

Tomemos ahora ϕ como función test en la ecuación que satisface z y z en la que satisface ϕ. Obtenemos

$$\int_\Omega A_\infty(x)\nabla z\cdot\nabla\phi = \lambda\int_\Omega f'_{+\infty}(x)z\phi + \int_\Omega \varphi\phi,$$

y

$$\int_\Omega A_\infty(x)\nabla\phi\cdot\nabla z = \int_\Omega z\varphi.$$

Esto implica, puesto que $A_\infty(x)$ es simétrica, que

$$\int_\Omega \varphi z = \lambda\int_\Omega f'_{+\infty}(x)z\phi + \int_\Omega \varphi\phi.$$

Usando ahora las desigualdades de Hölder y Poincaré tenemos que

$$\|\varphi\|_2\|z-\phi\|_2 \geq \int_\Omega \varphi(z-\phi) = \lambda\int_\Omega f'_{+\infty}(x)z\phi \geq \lambda\lambda_1\int_\Omega z\phi.$$

Puesto que $\|z-\phi\| = \varepsilon$, podemos escribir $z = \phi + \varepsilon z_1$ con $\|z_1\| = 1$. Así, aplicando la desigualdad de Poincaré a la anterior, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{\lambda\lambda_1\sqrt{\mu}}\|\varphi\|_2 &\geq \int_\Omega z\phi \\
&= \|\phi\|_2^2 + \varepsilon\int_\Omega z_1\phi \\
&\geq \|\phi\|_2^2 - \varepsilon\int_\Omega |z_1\phi| \\
&\geq \|\phi\|_2^2 - \varepsilon\|z_1\|_2\|\phi\|_2 \\
\text{(Poincaré inequality)} &\geq \|\phi\|_2^2 - \varepsilon\frac{\|\phi\|_2}{\sqrt{\mu}}.
\end{aligned}$$

Esto implica que $\lambda \leq \dfrac{\varepsilon\|\varphi\|_2}{\lambda_1\sqrt{\mu}\|\phi\|_2^2 - \varepsilon\lambda_1\|\phi\|_2} < \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Por otra parte, z es super-solución positiva para el problema

$$\begin{aligned}
-\mathrm{div}(A_\infty(x)\nabla u) &= \lambda f'_{+\infty}(x)u \qquad x \in \Omega, \\
u &= 0 \qquad\qquad\quad x \in \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Para este problema también podemos encontrar una sub-solución de la forma $w = \delta\lambda\varphi_1$ con $\delta < 1/\lambda_1$ (donde φ_1 denota ahora la primera función propia positiva normalizada asociada a $\mu_1(f'_{+\infty}(x))$) . Notemos que puesto que $z \neq \phi$, se tiene que $\lambda \neq 0$. Además podemos elegir δ suficientemente pequeño para concluir que $w \leq z$. El método de sub y super-solución permite deducir entonces la existencia de una solución no negativa y no trivial. Como consecuencia de esto, λ será el primer autovalor positivo $\mu_1(f'_{+\infty}(x))$ para el anterior problema de autovalores con pesos.

Puesto que $\lambda_1 < f'_{+\infty}(x) < \lambda_2$ a.e. $x \in \Omega$, se sabe que

$$1 = \mu_1(\lambda_1) > \mu_1(f'_{+\infty}) = \lambda > \mu_1(\lambda_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Esto es una contradicción con el hecho que $\lambda < \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. □

Los resultados anteriores serán de utilidad para probar el siguiente teorema en el que se describe el rango de valores $t \in \mathbb{R}$ para los que hay existencia y multiplicidad de soluciones de (Q_t).

TEOREMA 4.7. *Supongamos que los coeficientes de la matriz* $A_\infty(x)$ *sean de clase* $C^1(\overline{\Omega})$ *y se verifica* (A_{1-4}). *Supongamos además que la función* $f(x,\cdot)$ *es creciente a.e.* $x \in \Omega$ *y verifica* (f_1) *con* $C_1, C_2 \in L^\infty(\Omega)$ *y* (f_{2-3}). *Entonces existe* $t^* \in \mathbb{R}$ *tal que*

(1) (Q_t) *tiene al menos dos soluciones para todo* $t << t^*$,
(2) (Q_t) *tiene al menos una solución para* $t \leq t^*$,
(3) (Q_t) *no tiene solución para todo* $t > t^*$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos el conjunto S de números reales definido por

$$S \equiv \{t \in \mathbb{R} : \, (Q_t) \text{ admite una solución}\}.$$

Primero probamos que S no es el conjunto vacío. Para ello usaremos el Grado Topológico de Leray-Schauder. Sea $0 < \varepsilon < \sqrt{\mu}\frac{\lambda_1^2\|\phi\|_2^2}{\lambda_2\|\varphi\|_2 + \lambda_1^2\|\phi\|_2}$ y tomemos $t < t_\varepsilon$ (donde t_ε viene dado por el Lema 4.6). Denotamos ahora por Φ_t al operador dado por $\Phi_t(u) = u - T(f(x,u) + t\varphi)$. La invariancia por homotopía, (d_3), del grado de Leray-Schauder implica que

$$\deg(\Phi_t, B_{|t|\varepsilon}(t\phi), 0) = \deg(I - T_1(t\phi), B_{|t|\varepsilon}(t\phi), 0) = 1,$$

donde T_1 denota al operador inverso de $-\text{div}(A_\infty(x)\nabla u)$. Entonces existe al menos una solución de (Q_t) en $B_{|t|\varepsilon}(t\phi)$. Esto significa que el intervalo $(-\infty, t_\varepsilon)$ es un subconjunto de S.

El siguiente paso será observar que S es un intervalo (no acotado inferiormente). En efecto, sea $t \in S$ y consideremos una solución u de (Q_t). Puesto que $\overline{u} \equiv u$ es super-solución de $(Q_{t'})$ con $t' < t$, el método de sub y super-solución permite concluir que $(-\infty, t] \subset S$ siempre que encontremos una sub-solution de $(Q_{t'})$ menor que u para cada $t' < t$. Para probar la existencia de tal sub-solución observamos en primer lugar que, debido a (f_{1-3}), para cada $\delta_1 < \lambda_1$ deducimos la existencia de $C \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$f(x,s) \geq \delta_1 s - C, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Denotemos

$$l(t,x,s) = t\varphi + \text{mín}\{f(x,\overline{u}), \delta_1 s - C\}.$$

Por el Teorema 4.1 con $f(x,s) = l(t',x,s)$ y $f'_{+\infty}(x) = 0$, $f'_{-\infty}(x) = \delta_1$, podemos considerar una solución $\underline{u}$ de

$$\left.\begin{array}{rcll} -\text{div}(A(x,u)\nabla u) & = & l(t',x,u) & x \in \Omega, \\ u & = & 0 & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Gracias a (4.8) y al Lema 2.2, $\underline{u}$ es subsolución de $(Q_{t'})$. Finalmente, puesto que $l(t',x,s) \leq t'\varphi + f(x,\overline{u})$ tenemos que

$$-\text{div}(A(x,\underline{u})\nabla\underline{u}) = l(t',x,\underline{u}) \leq t'\varphi + f(x,\overline{u}) \leq -\text{div}(A(x,\overline{u})\nabla\overline{u}),$$

por el principio de comparación llegamos a $\underline{u} \leq \overline{u}$, probando la existencia de una sub-solución y así que S es un intervalo.

Ahora probaremos que S está acotado superiormente. Supongamos que por el contrario u_n fuese solución de (Q_{t_n}), con $t_n \to +\infty$.

Puesto que $f'_{-\infty}(x) < c_+ < \lambda_1 < c_- < f'_{+\infty}(x)$, consideremos $\delta_1 < \lambda_1 < \delta_2$ verificando (4.8) y

$$f(x,s) \geq \delta_2 s - C, \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{4.9}$$

para algún $C > 0$. Tomando $v = \psi_1$ (ψ_1 primera función propia positiva normalizada asociada a $\lambda_1 = \mu_1(1)$) como función test en la ecuación que satisface u_n, sumando y restando $\lambda_1 \int\limits_\Omega u_n\psi_1$, deducimos de (4.8) que

$$\begin{aligned} t_n \int\limits_\Omega \varphi\psi_1 &\leq \int\limits_\Omega \left[A(x,u_n) - A_\infty(x)\right] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1 \\ &\quad -(\delta_1 - \lambda_1)\int\limits_\Omega u_n\psi_1 + \int\limits_\Omega C\psi_1. \end{aligned}$$

Similarmente, usando (4.9) obtenemos que

$$\begin{aligned} t_n \int\limits_\Omega \varphi\psi_1 &\leq \int\limits_\Omega \left[A(x,u_n) - A_\infty(x)\right] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1 \\ &\quad -(\delta_2 - \lambda_1)\int\limits_\Omega u_n\psi_1 + \int\limits_\Omega C\psi_1. \end{aligned}$$

Puesto que $(\delta_1 - \lambda_1)(\delta_2 - \lambda_1) < 0$, tenemos que o bien el término $(\delta_1 - \lambda_1)\int\limits_\Omega u_n\psi_1 < 0$ o bien $(\delta_2 - \lambda_1)\int\limits_\Omega u_n\psi_1 < 0$. Llegamos entonces a

$$\begin{aligned} t_n \int\limits_\Omega \varphi\psi_1 &\leq \int\limits_\Omega \left[A(x,u_n) - A_\infty(x)\right] \nabla u_n \cdot \nabla \psi_1 + \int\limits_\Omega C\psi_1 \\ &\leq 2\beta\|u_n\|\|\psi_1\| + C\|\psi_1\|_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, puesto que t_n es no acotada, tenemos que $\|u_n\|$ tampoco lo es. Usando los mismos argumentos que en la prueba del Teorema 4.1 tenemos que $z_n = u_n/\|u_n\|$ converge fuertemente a una función $z \in H_0^1(\Omega)$. Así, de (A_4) deducimos que

$$\frac{t_n}{\|u_n\|}\int\limits_\Omega \varphi\psi_1 \leq \int\limits_\Omega \left[A(x,u_n) - A_\infty(x)\right] \nabla z_n \cdot \nabla \psi_1 + \frac{1}{\|u_n\|}\int\limits_\Omega C\psi_1 \to 0,$$

es decir, $t_n/\|u_n\| \to 0$. En ese caso la ecuación satisfecha por z es (4.1) con $1 = \mu$ $(m(x) = f'_{-\infty}(x)\chi_{\{z<0\}} + f'_{+\infty}(x)\chi_{\{z\geq 0\}})$. En la prueba del Lema 4.5 está probado que esto es una contradicción, probando que S está acotado superiormente.

Para concluir los items 2 y 3 es bastante probar que S *es cerrado*. Con esa idea, sea $\{t_n\} \subset S$ una sucesión convergente a $t \in \mathbb{R}$. Para cada t_n, sea u_n una solución de (Q_{t_n}), es decir $u_n = T(f(x,u_n) + t_n\varphi)$. Por el Lema 4.5, $\|u_n\|$ es acotada y por la compacidad de T deducimos que, pasando a una subsucesión, u_n converge fuertemente a una solución de (Q_t).

Acabamos de probar los items 2 y 3. Con respecto al item 1, puesto que $S = (-\infty, t^*]$, solo falta encontrar otra solución de (Q_t), para cada $t << t^*$. Tomemos $0 < \varepsilon < \sqrt{\mu}\frac{\lambda_1^2\|\phi\|_2^2}{\lambda_2\|\varphi\|_2 + \lambda_1^2\|\phi\|_2}$ y $t < t_\varepsilon \leq t^* < t_1$. Podemos probar usando (A_2) que existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_{|t|\varepsilon}(t\phi) \subset B_R(0)$ y (Lema 4.5) para cada solución u de $(Q_{t'})$, con $t' \in [t, t_1]$, tengamos que $\|u\| < R$. Además, puesto que $t_1 > t^*$, la ecuación $u - T(f(x,u) + t_1\varphi) = \Phi_{t_1}(u) = 0$ no tiene solución y así

$$\deg(\Phi_{t_1}, B_R(0), 0) = 0.$$

Teniendo de nuevo en cuenta la propiedad de invariancia por homotopía del grado de Leray-Schauder, deducimos

$$\deg(\Phi_{t'}, B_R(0), 0) = \text{ constante}, \quad \forall t' \in [t, t_1],$$

entonces,

$$\deg(\Phi_t, B_R(0), 0) = 0.$$

Así, recordando que $\deg(\Phi_t, B_{|t|\varepsilon}(t\phi), 0) = 1$ y aplicando la propiedad de excisión (d_2) llegamos a

$$\begin{aligned} \deg(\Phi_t, B_R(0) \setminus B_{|t|\varepsilon}(t\phi), 0) &= \deg(\Phi_t, B_R(0), 0) \\ &\quad -\deg(\Phi_t, B_{|t|\varepsilon}(t\phi), 0) = -1, \end{aligned}$$

es decir, existe una segunda solución de $\Phi_t(u) = 0$ en $B_R(0) \setminus B_{|t|\varepsilon}(t\phi)$, la cual junto con la anteriormente encontrada en $B_{|t|\varepsilon}(t\phi)$ implica el item 1. $\square$

En el caso de no-linealidades f verificando (f_4) conseguimos un resultado similar al anterior. Sin embargo, no podemos recuperar la existencia de una segunda solución de (Q_t) para cada $t << t^*$.

Teorema 4.8. *Supongamos* (A_{1-4}), $(f_{2,4})$ *con* $h \in L^\infty(\Omega)$, $(f'_{1,3})$, (2.4) *y que la función* $f(x,\cdot)$ *sea creciente a.e.* $x \in \Omega$. *Entonces, existe* $t^* \in \mathbb{R}$ *tal que*

(1) (Q_t) *tiene al menos una solución para* $t \le t^*$,
(2) (Q_t) *no tiene solución para cada* $t > t^*$.

Demostración. La prueba sigue la misma línea del teorema anterior. Al igual que entonces, notamos por S al conjunto

$$S \equiv \{t \in \mathbb{R} : (Q_t) \text{ admite solución}\}.$$

En primer lugar probamos que S no es vacío. Esto quedará probado si encontramos $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que (Q_{t_0}) admite una super-solución. En efecto, razonando como en el Teorema 4.7 podemos encontrar una sub-solución bien ordenada y el método de sub y super-solución permite deducir que en este caso $t_0 \in S$. En orden a encontrar t_0, seguimos de cerca las ideas de [**80**]. Para cada $j > 0$, definimos $M_j = \sup\{|f(x,s)| : x \in \Omega,\ s \in [0,j]\}$. Por [**69**, Teorema 8.16] existe una constante positiva c tal que $\|w\|_0 \le c\|b\|_{N+1}$ para toda solución w de

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,w)\nabla w) & = & b, & x \in \Omega\ , \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega\ , \end{array}\right\}$$

con $b \in L^{N+1}(\Omega)$. Sea $\delta = (\frac{j}{cM_j})^{N+1} > 0$ y tomemos dos conjuntos abiertos Ω_1, Ω_2 de la siguiente forma:

$$\Omega_1 \subset \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2 \subset \overline{\Omega}_2 \subset \Omega,$$

con medida de Lebesgue $|\Omega - \Omega_1| \leq \delta$. Consideremos una función b continua en $\overline{\Omega}$ tal que

$$b(x) = 0, \ \forall x \in \Omega_1,$$

$$0 \leq b(x) \leq M_j, \ \forall x \in \overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1,$$

$$b(x) = M_j, \ \forall x \in \Omega \setminus \Omega_2.$$

Para tal b, sea $\overline{u}$ una solución del problema anterior. Usando $\overline{u}^-$ como función test deducimos fácilmente que $\overline{u}^- \equiv 0$, es decir, $\overline{u} \geq 0$. Así,

$$0 \leq \overline{u}(x) \leq c\|b\|_{N+1} \leq cM_j(|\Omega - \Omega_1|^{\frac{1}{N+1}}) \leq cM_j\delta^{\frac{1}{N+1}} \leq j, \text{ a.e. } x \in \Omega,$$

y por la definición de M_j, $f(x, \overline{u}(x)) \leq M_j$ a.e. $x \in \Omega$. Tomando ahora $t_0 < 0$ tal que $M_j + t_0\varphi \leq 0$ en Ω_2, entonces

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}(A(x,\overline{u})\nabla\overline{u}) &= b = b\chi_{\{\Omega\setminus\Omega_2\}} + b\chi_{\{\Omega_2\}} \\ &\geq M_j\chi_{\{\Omega\setminus\Omega_2\}} + (M_j + t_0\varphi)\chi_{\{\Omega_2\}} \\ &\geq M_j + t_0\varphi \\ &\geq f(x,\overline{u}) + t_0\varphi, \end{aligned}$$

es decir $\overline{u}$ es una super-solución para (Q_{t_0}).

La prueba de que S es un intervalo cerrado no acotado inferiormente es la misma que en el teorema anterior. La principal diferencia es probar que S está acotado superiormente. Para ello razonemos por contradicción y supongamos que existe una sucesión u_n de soluciones de (Q_{t_n}) con $t_n \to +\infty$. Denotemos, igual que en el Capítulo III, por μ_n al primer valor propio para el problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u_n)\nabla v) &=& \mu v & x\in\Omega, \\ v &=& 0 & x\in\partial\Omega, \end{array}\right\}$$

y ϕ_n una función propia asociada a μ_n. Recordemos que (A_{1-2}) implican que $\alpha\mu \le \mu_n \le \beta\mu$.

Observemos ahora que puesto que se verifican $(f_{2,4})$, $(f'_{1,3})$, podemos usar (4.8) para $\delta \ge \alpha\mu$. Tomando $w = \phi_n$ como función test en la ecuación que satisface u_n tenemos, para $\delta = \beta\mu$, que

$$\begin{aligned} \mu_n \int_\Omega \phi_n u_n &= \int_\Omega A(x,u_n)\nabla u_n \cdot \nabla\phi_n = \int_\Omega f(x,u_n)\phi_n + t_n \int_\Omega \varphi\phi_n \\ &> \beta\mu \int_\Omega \phi_n u_n - C\int_\Omega \phi_n + t_n \int_\Omega \varphi\phi_n. \end{aligned}$$

Análogamente, para $\delta = \alpha\mu$

$$\mu_n \int_\Omega \phi_n u_n > \alpha\mu \int_\Omega \phi_n u_n - C\int_\Omega \phi_n + t_n \int_\Omega \varphi\phi_n.$$

Puesto que $(\mu_n - \alpha\mu)(\mu_n - \beta\mu) < 0$, se obtiene de alguna de las desigualdades anteriores que $-C\int_\Omega \phi_n + t_n \int_\Omega \varphi\phi_n < 0$. Así, $t_n < C\dfrac{\int_\Omega \phi_n}{\int_\Omega \varphi\phi_n}$. Más aún, por la desigualdad de Poincaré tenemos que $t_n < \dfrac{c_1}{\int_\Omega \varphi \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|}}$. Afirmamos ahora que $\int_\Omega \varphi\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|}$ *está lejos de cero*. En otro caso, pasando a una subsucesión si fuese necesario, convergería a cero. Por otra parte, $\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|}$ está acotada en $H_0^1(\Omega)$ y por tanto existe $z \in H_0^1(\Omega)$ tal que -pasando a una subsucesión- $\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \to z \ge 0$ fuertemente en $L^2(\Omega)$. Por (A_{1-2}),

$$\frac{\alpha}{\beta\mu} \le \frac{\alpha}{\mu_n} \le \|\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|}\|_2^2 \le \frac{\beta}{\mu_n} \le \frac{\beta}{\alpha\mu}.$$

Por lo tanto $z \neq 0$, y el Teorema de Lebesgue implica que

$$\int_\Omega \varphi \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \to \int_\Omega \varphi z.$$

Así $\int_\Omega \varphi z = 0$, lo cual es una contradicción, probando la afirmación.

Esta afirmación nos lleva a deducir que existe alguna constante c_2 tal que $\int_\Omega \varphi \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} > c_2$. Por lo tanto $t_n < \dfrac{c_1}{\int_\Omega \varphi \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|}} < c_1/c_2$, lo cual contradice que $t_n \to +\infty$, y concluye así la prueba del teorema. $\square$

Consideremos ahora el caso particular en que la no-linealidad f es una función de clase C^1 verificando (f_{1-3}) y que la matriz A satisface la siguiente condición

$$A(x,s) = a(s)A(x),\ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{A_5}$$

con $A(x) := (a_{ij}(x))$ una matriz definida positiva con coeficientes continuamente derivables $a_{ij}(x)$ en $\overline{\Omega}$ y $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 verificando

$$0 < k_1 \equiv \inf_{s\in\mathbb{R}} a(s) \leq k_2 \equiv \sup_{s\in\mathbb{R}} a(s) < +\infty.$$

Notemos que en este caso las condiciones (A_{1-3}) se satisfacen. En este caso mejoramos los resultados de esta sección probando la existencia de un continuo en el conjunto $\Sigma = \{(t,u) \in \mathbb{R} \times E :\ u \text{ solución de } (Q_t)\}$.

Sea $\hat{a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por:

$$\hat{a}(s) = \int_0^s a(t)dt.$$

Con este cambio de variable podemos asegurar que, u es solución de (Q_t), es decir

$$\int_\Omega a(u)A(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f(x,u)v + t\int_\Omega \varphi v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

si, y sólo si $w = \hat{a}(u)$ satisface

$$\int_\Omega A(x)\nabla w \cdot \nabla v = \int_\Omega f(x, \hat{a}^{-1}(w))v + t\int_\Omega \varphi v, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

es decir, w verifica

$$\left.\begin{array}{rcl} -\mathrm{div}(A(x)\nabla w) & = & f(x, \hat{a}^{-1}(w)) + t\varphi, \quad x \in \Omega, \\ w & = & 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Demostramos ahora un resultado, probado en el caso semi-lineal (véase [**66**]) con un poco menos de generalidad.

Lema 4.9. *Supongamos que* $f \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. *Sean* $\overline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ *una super-solución de* (Q_t) *y* $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ *una solución de* (Q_t) *tal que* $\overline{u} \geq u$ *y* $\overline{u} \not\equiv u$. *Entonces,* $\overline{u}(x) > u(x)$ *en* Ω *y* $a(\overline{u})\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial n} < a(0)\dfrac{\partial u}{\partial n}$ *en* $\partial\Omega$.

Nota 4.10. Análogamente, si $\underline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ es una subsolución de (Q_t) y $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ una solución de (Q_t) tal que $\underline{u} \leq u$ y $\underline{u} \not\equiv u$, entonces $\underline{u} < u$ en Ω y $a(\underline{u})\dfrac{\partial \underline{u}}{\partial n} > a(0)\dfrac{\partial u}{\partial n}$ en $\partial\Omega$.

Demostración. Supongamos que $\overline{u}$ es una super-solución y u una solución de (Q_t) con $\overline{u} \geq u$, $\overline{u} \not\equiv u$. Definamos

$$k = \text{máx}\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial s}(x,s)/a(s)\right| : x \in \overline{\Omega},\ u(x) \leq s \leq \overline{u}(x)\right\}.$$

Observemos que fijado $x \in \overline{\Omega}$, la función $f(x,s) + t\varphi + k\hat{a}(s)$ es no decreciente en $s \in [u(x), \overline{u}(x)]$. Así,

$$\begin{array}{rcl} -\mathrm{div}(A(x)\nabla\hat{a}(\overline{u})) + k\hat{a}(\overline{u}) & \geq & f(x,\overline{u}) + t\varphi + k\hat{a}(\overline{u}) \\ & \geq & f(x,u) + t\varphi + k\hat{a}(u) \\ & = & -\mathrm{div}(A(x)\nabla\hat{a}(u)) + k\hat{a}(u). \end{array}$$

Denotando $w = \hat{a}(\overline{u}) - \hat{a}(u)$ obtenemos que

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla w) + kw \geq 0.$$

Usando que $\overline{u} \not\equiv u$, el principio del máximo fuerte implica que

$$0 < w = \hat{a}(\overline{u}) - \hat{a}(u) \text{ en } \Omega,$$

y

$$\frac{\partial(\hat{a}(\overline{u}) - \hat{a}(u))}{\partial n} = a(\overline{u})\frac{\partial \overline{u}}{\partial n} - a(0)\frac{\partial u}{\partial n} < 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Más aún, puesto que $\hat{a}$ es estrictamente creciente obtenemos que $\overline{u} > u$ en Ω. □

En el siguiente teorema usaremos el Lema 4.9 y el Teorema 1.10 para asegurar que, para matrices verificando (A_5), (Q_t) tiene al menos dos soluciones para $t < t^*$, t^* dado por el Teorema 4.7.

TEOREMA 4.11. *Sea f una función C^1 verificando (f_{2-3}). Supongamos que A satisface (A_5) con $\lim_{s\to+\infty} a(s) = \lim_{s\to-\infty} a(s)$. Entonces para todo $t_0 < t^* \equiv \sup\{t \in \mathbb{R} : (Q_t)$ admite solución$\}$ existe un continuo $\mathcal{C}$ en Σ verificando que*

(1) $[t_0, t^*] \subset \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\mathcal{C}$.

(2) *Para cada $t \in [t_0, t^*)$, $\mathrm{Proy}_E\mathcal{C}$ contiene dos soluciones distintas de (Q_t).*

DEMOSTRACIÓN. Primero notamos que por el Lema 4.5, para todo $t_1 > t^* > t_0$ fijado, existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|u\|_0 < R$ para toda solución u de (Q_t) con $t \in [t_0, t_1]$.

Para cada $h \in H^{-1}(\Omega)$, denotamos $\tilde{T}(h)$ a la única solución del problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x)\nabla\hat{a}(u)) &=& h & x \in \Omega, \\ u &=& 0 & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Así, el operador $\tilde{T}$ transforma $H^{-1}(\Omega)$ en $H_0^1(\Omega)$. Además, usando el Teorema 9.15 de [**69**] y el Teorema de Morrey, tenemos que $\tilde{T}(L^r(\Omega)) \subset C_0^1(\overline{\Omega})$ para cada $r > N$.

Entonces, denotando por $\tilde{\Phi}_t \equiv u - \tilde{T}(f(x,u) + t\varphi)$ y usando la propiedad de invariancia por homotopía del grado,

$$\deg(\tilde{\Phi}_t, B_r(0), 0) = \text{ constante}, \forall t \in [t_0, t_1], \forall r \geq R,$$

donde ahora $B_r(0) \equiv \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : \|u\|_0 < r\}$. Puesto que el problema (Q_{t_1}) no tiene solución deducimos que el anterior grado es cero para $t = t_1$. Así,

$$\deg(\tilde{\Phi}_t, B_r(0), 0) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1], \forall r \geq R.$$

Sea u^* la solución de (Q_{t^*}) dada por el item 2 del Teorema 4.7. Recordemos que u^* es super-solución de (Q_t) para todo $t \in [t_0, t^*)$ y no es solución. Más aún, razonando como en el Teorema 4.7, existe una sub-solución $u_{t_0} < u^*$ de (Q_{t_0}) que no es solución. Claramente u_{t_0} es también sub-solución y no solución para (Q_t) si $t \in [t_0, t^*)$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{O} = \{u \in C_0^1(\overline{\Omega}) : u_{t_0} < u < u^* \text{ en } \Omega; \frac{\partial u^*}{\partial n} < \frac{\partial u}{\partial n} < \frac{\partial u_{t_0}}{\partial n}, \text{ en } \partial\Omega\}.$$

El Lema 4.9 implica la no existencia de soluciones de (Q_t) en $\partial\mathcal{O}$ (frontera tomada en $C_0^1(\overline{\Omega})$). En particular, no hay ninguna solución en la frontera de $\mathcal{O} \cap B_r(0)$ $(r \geq R)$ lo cual significa que el grado de $\tilde{\Phi}_t$ está bien definido en este conjunto.

Afirmamos ahora que *existe $r \geq R$, tal que*

$$\deg(\tilde{\Phi}_t, \mathcal{O} \cap B_r(0), 0) = 1.$$

En efecto, fijado $t \in [t_0, t^*]$ tomamos

$$k = \max\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial s}(x,s)/a(s)\right| : x \in \overline{\Omega},\, u_{t_0}(x) < s < u^*(x)\right\},$$

y definimos la función de truncadura $\tilde{f}$ de la siguiente forma:

$$\tilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(x, u_{t_0}(x)) + k\hat{a}(u_{t_0}(x)) & \text{si} \quad s \leq u_{t_0}(x), \\ f(x,s) + k\hat{a}(s) & \text{si} \quad u_{t_0}(x) < s < u^*(x), \\ f(x, u^*(x)) + k\hat{a}(u^*(x)) & \text{si} \quad s \geq u^*(x). \end{cases}$$

Observemos que $\tilde{f}(x,s) + t\varphi$ está acotada y es no decreciente en la variable s. Consideremos ahora para cada $h \in H^{-1}(\Omega)$ la única solución $u = \tilde{T}'h$ del problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\operatorname{div}(A_\infty(x)\nabla\hat{a}(u)) + k\hat{a}(u) & = & h & x \in \Omega, \\ u & = & 0 & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Esto define un operator $\tilde{T}' : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$. Puesto que la función $\tilde{f}(x,s)+t\varphi$ es acotada, por [**69**, Teorema 9.15] y el Teorema de Morrey, sabemos que $\tilde{T}'(\tilde{f}(x,\cdot) + t\varphi)$ es acotado en $C^1(\overline{\Omega})$. Sea

$$r_0 = \sup\{\|\tilde{T}'(\tilde{f}(x,v) + t\varphi)\|_{C^1(\overline{\Omega})} : \, v \in C^1(\overline{\Omega})\}$$

y tomemos $r > \text{máx}\{R, r_0\}$. Por la definición de $\tilde{f}$ tenemos que $\tilde{f}(x, u_{t_0}) + t_0\varphi \leq \tilde{f}(x,v) + t\varphi \leq \tilde{f}(x,u^*) + t^*\varphi$ para todo $v \in C_0^1(\overline{\Omega})$ y consecuentemente, por el Lema 4.9, obtenemos que

$$\{\tilde{T}'(\tilde{f}(x,v) + t\varphi) : \, v \in C_0^1(\overline{\Omega})\} \subset \mathcal{O} \cap B_r(0).$$

Ahora tomamos $\psi \in \mathcal{O} \cap B_r(0)$ y consideramos la homotopía compacta, $H(s,u) = s\tilde{T}'(\tilde{f}(x,u) + t\varphi) + (1-s)\psi$, $0 \leq s \leq 1$. Puesto que $\mathcal{O} \cap B_r(0)$ es un conjunto convexo tenemos que $u \neq H(s,u)$ para todo $u \in \partial\mathcal{O} \cap B_r(0)$ y $s \in [0,1]$. Por lo tanto

$$\deg(I - \tilde{T}'(\tilde{f}(x,\cdot) + t\varphi), \mathcal{O} \cap B_r(0), 0) = \deg(I - \psi, \mathcal{O} \cap B_r(0), 0) = 1.$$

Notando ahora que $\tilde{f}(x, v(x)) = f(x, v(x)) + k\hat{a}(v(x))$ para toda función $v \in \overline{\mathcal{O} \cap B_r(0)}$, llegamos a

$$\deg(\tilde{\Phi}_t, \mathcal{O} \cap B_r(0), 0) = \deg(I - \tilde{T}'(\tilde{f}(x, \cdot) + t\varphi), \mathcal{O} \cap B_r(0), 0) = 1,$$

probando nuestra afirmación.

Tomemos $R_1 > r$ de manera que $\mathcal{O} \subset B_{R_1}(0)$. Con objeto de usar el Teorema 1.10, tomamos $U = B_{R_1}(0)$, $U_1 = \mathcal{O} \cap B_r(0)$ y $[a, b] = [t_0, t_1]$. Notemos que (Q_t) no tiene solución en $\partial B_{R_1}(0)$ para cada $t \in [t_0, t_1]$ y (Q_{t_1}) no tiene solución en $\overline{B_{R_1}(0)}$. Además, acabamos de probar que $\deg(I - \tilde{T}'(\tilde{f}(x, \cdot) + t\varphi), \mathcal{O} \cap B_r(0), 0) = 1$. Por tanto estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.10 para deducir que existe un continuo $\mathcal{C}$ en Σ tal que

$$\mathcal{C} \cap (\{t_0\} \times \mathcal{O} \cap B_r(0)) \neq \emptyset,$$

y

$$\mathcal{C} \cap (\{t_0\} \times [B_R(0) \setminus \overline{\mathcal{O} \cap B_r(0)}]) \neq \emptyset.$$

Más aún, usando el Lema 4.9 es posible probar que (Q_t) no tiene solución en $\partial\mathcal{O} \cap B_r(0)$ para cada $t \in [t_0, t^*)$. Así, debido a la conexión de $\mathcal{C}$, deducimos que $\mathcal{C}$ interseca a $\partial\mathcal{O} \cap \{t\} \times B_r(0)$ con $t \in [t_0, t^*]$ si, y sólo si $t = t^*$. Esto prueba que la proyeción sobre E del continuo contiene al menos dos soluciones de (Q_t) para todo $t \in [t_0, t^*)$, probando el teorema. □

Con la misma prueba, pero usando el item *(ii)* del Lema 4.5 en lugar del item *(i)* del mismo, podemos considerar el caso de no-linealidades “superlineales”:

TEOREMA 4.12. *Sea f una función de clase C^1 verificando (f_2), (f_3'), (f_4) con $h \in L^\infty(\Omega)$ Supongamos que A satisface (A_5) con* $\lim_{s \to +\infty} a(s) =$

$\lim_{s\to-\infty} a(s)$. *Entonces, para cada* $t_0 < t^*$*, dado por* $t^* \equiv \sup\{t \in \mathbb{R} :$ (Q_t) *admite solución*$\}$ *existe un continuo* $\mathcal{C}$ *en* Σ *verificando que*

(1) $[t_0, t^*] \subset \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\ \mathcal{C}$.

(2) $\mathrm{Proy}_E\ \mathcal{C}$ *contiene dos soluciones distintas de* (Q_t) *para todo* $t \in [t_0, t^*)$. □

IV.4. Comentarios Finales.

Respecto a problemas en los que la no-linealidad f interactúa con los valores propios de (0.2), hemos estudiado el caso en que $f'_{-\infty}(x)$ y $f'_{+\infty}(x)$ salten solamente el primer valor propio (cuando se verifica la condición (f_3)) o bien los salten todos (si imponemos (f'_3)). Cabe plantearse también el problema de interacciones con un conjunto finito de valores propios, es decir, existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, con $1 < k_1 < k_2$, de manera que

$$\lambda_{k_1-1} < f'_{-\infty}(x) < \lambda_{k_1},$$

$$\lambda_{k_2-1} < f'_{+\infty}(x) < \lambda_{k_2}.$$

Entre los trabajos conocidos en el ambiente semi-lineal, podemos citar en este caso [**79**] en dimensión $N = 1$ y [**63, 78**] para el caso $N > 1$. Igualmente nos podemos plantear el caso de interacción con todos salvo un conjunto finito de valores propios, es decir, cuando para algún $k > 1$ se verifica

$$\lambda_{k-1} < f'_{-\infty}(x) < f'_{+\infty}(x) \equiv +\infty.$$

Aquí podemos citar [**57, 94**] para problemas en dimensión $N = 1$ y [**30, 53**] en dimensión superior a uno.

Al respecto de este tipo de problemas, convendría recordar que en el trabajo original de Ambrosetti-Prodi (véase [**13**]), usando resultados de *inversión global de aplicaciones con singularidades entre espacios de Banach* prueban el teorema:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio acotado con frontera* $\partial\Omega$ *de clase* $C^{2,\alpha}$ *(*$0 < \alpha < 1$*) y* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *satisfaciendo:*

(i) $f(0) = 0$,

(ii) $f''(s) > 0$ *para cada* $s \in \mathbb{R}$,

(iii) $\lim_{s \to -\infty} f'(s) = f'(-\infty) < \lambda_1 < f'(+\infty) = \lim_{s \to +\infty} f'(s) < \lambda_2$.

Entonces existe en $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *una* C^1*-variedad* $\mathcal{M}$ *conexa y cerrada de codimensión* 1*, de manera que* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \setminus \mathcal{M}$ *tiene exactamente dos componentes conexas,* $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ *con las siguientes propiedades:*

(a) Si $h \in \mathcal{A}_1$ *el problema*

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(u) + h, & x \in \Omega, \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

no tiene solución en $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$,

(b) Si $h \in \mathcal{A}_2$ *el problema tiene exactamente dos soluciones en* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$,

(c) Si $h \in \mathcal{M}$ *el problema admite solución única en* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Se obtenía así una descripción precisa del número de soluciones de (Q_t) en este caso. Otros trabajos donde también se obtiene el número exacto de soluciones para problemas semi-lineales son [**31, 35, 51**]. Por nuestra parte (Teorema 4.7) solamente damos una cota inferior de este número de soluciones. Como quiera que el método de inversión global es un método global que no solamente es aplicable a operadores lineales, nos planteamos si será de utilidad en nuestro caso. La principal dificultad radica en que el tipo de operadores considerados por nosotros no es, en general, diferenciable.

Respecto a la prueba de los resultados principales de la sección tercera, merece la pena hacer algunos comentarios. Comenzaremos con la demostración del Teorema 4.7. Aquí, la existencia de al menos dos soluciones para (Q_t) con t suficientemente pequeño es probada usando técnicas de grado topológico. También podríamos en este caso (al igual que hemos hecho en los Teoremas 4.11 y 4.12) emplear el Teorema 1.10 para obtener que, dado $t < t^*$ existe un continuo $\mathcal{C}_t \in \Sigma$ de manera que el conjunto

$$\{u \in E : (t,u) \in \mathcal{C}_t\},$$

contiene al menos dos soluciones de (Q_t). Para ello, y usando la misma notación que en la prueba del teorema, tomamos como U el conjunto $B_R(0)$, de esta manera

$$\deg(\Phi_t, U, 0) = 0,$$

y como $U_1 = B_{|t|\varepsilon}(t\phi)$, con lo que

$$\deg(\Phi_t, U_1, 0) = 1,$$

y así estamos en las condiciones del Teorema 1.10, que nos permite concluir la existencia del continuo $\mathcal{C}_t$. La principal diferencia respecto al Teorema 4.11 es que la proyección de dicho continuo a $\mathbb{R}$ no tiene por que contener el intervalo maximal de valores t para los que (Q_t) admite solución.

Finalmente, de la demostración de los Teoremas 4.7, 4.11 y 4.12 podemos concluir la existencia, para cada $t < t^*$ (suficientemente pequeño en el primer caso), de un continuo $\mathcal{C}_t \in \Sigma$ con la propiedad anterior. Nosotros pensamos que dicho continuo es independiente de t, es decir, que existe un continuo de soluciones $\mathcal{C} \in \Sigma$ de manera que para cada

$t < t^*$, $\mathcal{C}$ contenga dos soluciones distintas de (Q_t). Una primera aproximación en este sentido la obtenemos del Teorema 1.8 en el caso que las soluciones de (Q_t) sean aisladas para cada $t \in \mathbb{R}$. Éste nos permite probar que el continuo $\mathcal{C}_t \in \Sigma$ de soluciones de (Q_t) cuya existencia aseguran dichos teoremas es no acotado en $\mathbb{R} \times E$. Por tanto, usando el Lema 4.5, su proyección a $\mathbb{R}$ contiene la semirrecta $(-\infty, t]$. No sabemos, sin embargo, si para cada $t' \in (-\infty, t]$ este continuo contiene al menos dos soluciones de $(Q_{t'})$. A este respecto podemos intentar buscar condiciones que aseguren las hipótesis del Teorema 1.9 y demostrar así que dicho continuo tiene dos componentes no acotadas en $(-\infty, t^*) \times E$.

Capítulo V

Soluciones Positivas.

En la sección tercera del Capítulo II señalabamos como se puede estudiar la existencia de soluciones positivas de un determinado problema de contorno del tipo (0.1) a partir de la existencia de soluciones no triviales de un problema truncado (via principio del máximo). En el Capítulo III ya habíamos iniciado el estudio de la existencia de continuos de soluciones positivas para (P_λ). En este capítulo pretendemos completar los resultados de bifurcación obtenidos en dicho capítulo estudiando la existencia de cotas *a priori* sobre λ o en la norma $\|u\|_0$ de las soluciones (λ, u) de (P_λ). Esto nos permitirá describir el rango de valores λ para los cuales (P_λ) admita al menos una solución o al menos dos. Los resultados contenidos en el Capítulo III, así como en las tres primeras secciones del presente constituyen un trabajo, [**23**], aceptado para su publicación en *Proc. Roy. Soc. Edinb.* **A.**

V.1. Problemas asintóticamente lineales en infinito.

En la presente sección probaremos un resultado en el cual damos condiciones suficientes para obtener ambas bifurcaciones, desde cero y desde infinito, y estudiaremos la existencia de solución de (P_λ) en el caso de no-linealidades satisfaciendo $(\tilde{f}_2)$ (asintóticamente lineales en infinito).

TEOREMA 5.1. *Supongamos que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda, x, 0) = 0$ a.e. $x \in \Omega$. Supongamos también que se verifican las condiciones (A_{1-4}), $(\tilde{f}_{1-4})$ y $(\tilde{f}_3')$. Sean λ_∞ y λ_0 dados por* (3.1) *y* (3.9), *respectivamente.*

(i) Si alguna de las siguientes condiciones se satisface

(a) existe una función $k(x) \in L^1(\Omega)$ con $k^+ \not\equiv 0$, tal que

$$f(\lambda, x, s) \geq \lambda k(x) s \quad \forall (\lambda, x, s) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}^+, \tag{$\tilde{f}_5$}$$

(b) existe $\lambda_* \leq 0$ *tal que*

$$f(\lambda_*, x, s) \leq 0, \ \ a.e.\ x \in \Omega, \ \forall s > 0, \tag{$\tilde{f}_6$}$$

entonces el problema (P_λ) *tiene una solución positiva para todo* λ *entre* λ_0 *y* λ_∞*.*

(ii) Si se verifica la condición (2.4) *para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$*, y para algún* $\lambda_* \leq 0$ *y* $\overline{s} > 0$ *tenemos* $(\tilde{f}_6)$ *y*

$$f(\lambda, x, \overline{s}) \leq 0, \ \ a.e.\ x \in \Omega, \ \forall \lambda \geq \lambda_*, \tag{$\tilde{f}_7$}$$

entonces existen dos soluciones para $\lambda > \max\{\lambda_0, \lambda_\infty\}$*.*

Nota 5.2. En las Figuras 1, 2, 3 damos varios diagramas de bifurcación que se pueden dar en el caso de *(i)* para $\lambda_0 < \lambda_\infty$. Notemos que el lado de la bifurcación es importante para obtener una descripción del rango de valores λ para los cuales (P_λ) tiene solución. La Figura 1 corresponde al caso en que se satisfacen las hipótesis de los Teoremas 3.9-*(ii)* y 3.4-*(i)*. Así, la bifurcación es a la derecha en cero y a la izquierda en infinito y solamente podemos deducir la existencia de una solución para $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_\infty)$. La Figura 2 es un diagrama de bifurcación bajo las hipótesis de los Teoremas 3.9-*(ii)* y 3.4-*(ii)*. En este caso, la bifurcación es a la derecha en cero y en infinito. Entonces existen, al menos, dos soluciones para $\lambda \in (\lambda_\infty, \lambda_\infty + \varepsilon)$ (para algún $\varepsilon > 0$) y, al menos, una solución para $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_\infty)$. Por otra parte, si suponemos que se satisfacen las condiciones de los Teoremas 3.9-*(i)* y 3.4-*(ii)* obtenemos el diagrama de bifurcación dado en la Figura 3. La bifurcación es a la izquierda en cero y a la derecha en infinito. En este caso, existen, al menos, dos soluciones para $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0) \cup (\lambda_\infty, \lambda_\infty + \varepsilon)$ y, al menos una solución para $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_\infty)$. La Figura 4 es un ejemplo del item *(ii)* del teorema anterior donde el lado de la bifurcación es a la derecha (por ejemplo, si asumimos las hipótesis de los Teoremas 3.9-*(ii)* y 3.4-*(ii)*).

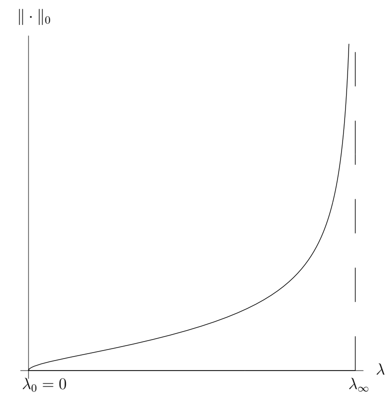

FIGURA 1

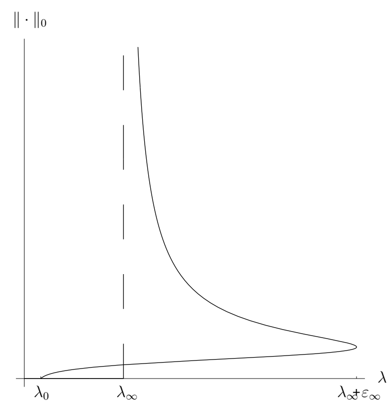

FIGURA 2

DEMOSTRACIÓN. Los Teoremas 3.4 y 3.9 prueban la existencia de dos conjuntos conexos Σ_0 y Σ_∞ de soluciones positivas de (P_λ) emanando respectivamente de $(\lambda_0, 0)$ y (λ_∞, ∞), y son los únicos. Para probar *(i)* es bastante mostrar que *existe bien un número* $\lambda^* \geq \max\{\lambda_0, \lambda_\infty\}$ *tal que, la ecuación* $u - T(f(\lambda, x, u)) = 0$ *no tiene soluciones positivas*

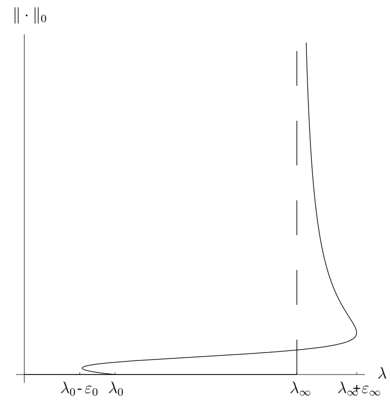

FIGURA 3

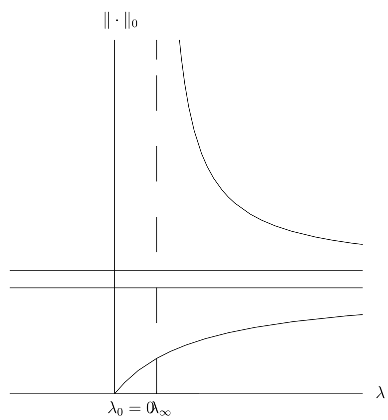

FIGURA 4

para $\lambda = \lambda^*$ *(lo que será cierto si se verifica* $(\tilde{f}_5)$*) o bien un número* $\lambda_* \leq \text{mín}\{\lambda_0, \lambda_\infty\}$ *tal que* $u - T(f(\lambda, x, u)) = 0$ *no tiene soluciones positivas para* $\lambda = \lambda_*$ *(lo cual será cierto supuesto* $(\tilde{f}_6)$*).* En efecto, ambos hechos implican que las proyecciones $\text{Proy}_{\mathbb{R}}\ \Sigma_0$ y $\text{Proy}_{\mathbb{R}}\ \Sigma_\infty$ sean intervalos acotados superiormente (por λ^*) o bien inferiormente (por λ_*). La naturaleza global de los continuos Σ_0 y Σ_∞ implica que bien $\Sigma_0 = \Sigma_\infty$ o, si $\Sigma_0 \cap \Sigma_\infty = \emptyset$, que $\text{Proy}_{\mathbb{R}}\ \Sigma_0$ y $\text{Proy}_{\mathbb{R}}\ \Sigma_\infty$ son intervalos no acotados. En cualquier caso, el intervalo abierto de extremos λ_0 y λ_∞ esta contenido en $\mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_0 \cup \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_\infty$ obteniendo la afirmación *(i)*. Para probar la afirmación anterior, si se verifica $(\tilde{f}_5)$ tomamos una solución (λ, u) de $u - T(f(\lambda, x, u)) = 0$, con $\lambda > 0$. Puesto que $k^+ \not\equiv 0$, existe $\psi \in H_0^1(\Omega)$, $\|\psi\| = 1$, tal que $\int\limits_\Omega k(x)\psi^2 > 0$. Eligiendo $\varepsilon > 0$ y $\psi^2/(u+\varepsilon)$ como función test, obtenemos

$$\int\limits_\Omega A(x,u)\nabla u \cdot \left(2\frac{\psi}{u+\varepsilon}\nabla\psi - \left(\frac{\psi}{u+\varepsilon}\right)^2 \nabla(u+\varepsilon)\right) = \int\limits_\Omega \frac{f(\lambda,x,u)}{u+\varepsilon}\psi^2.$$

Entonces, por (A_1)

$$\begin{aligned} \beta \quad &\geq \quad -\int\limits_\Omega A(x,u)\left(\nabla\psi - \left(\frac{\psi}{u+\varepsilon}\right)\nabla u\right)\cdot\left(\nabla\psi - \left(\frac{\psi}{u+\varepsilon}\right)\nabla u\right) \\ &\quad\quad +\int\limits_\Omega A(x,u)\nabla\psi\cdot\nabla\psi \\ &= \quad \int\limits_\Omega \frac{f(\lambda,x,u)}{u+\varepsilon}\psi^2, \end{aligned}$$

y puesto que $f(\lambda, x, u) \geq \lambda k(x) u$ para $\lambda > 0$ y $\int\limits_\Omega k(x)\psi^2 > 0$, deducimos que

$$\beta \geq \lambda \int\limits_\Omega k(x)\frac{u}{u+\varepsilon}\psi^2.$$

tomando límites cuando ε tiende a cero, se tiene

$$\lambda \leq \frac{\beta}{\int\limits_\Omega k(x)\psi^2}.$$

Así no hay soluciones positivas del problema (P_λ) para $\lambda > \beta/\int\limits_\Omega k(x)\psi^2$. En particular, puesto que λ_0 y λ_∞ son puntos de bifurcación de soluciones positivas, esto significa que $\beta/\int\limits_\Omega k(x)\psi^2 \geq \max\{\lambda_0, \lambda_\infty\}$ y entonces es bastante elegir $\lambda^* > \beta/\int\limits_\Omega k(x)\psi^2$ para obtener lo deseado en este caso.

Si se verifica $(\tilde{f}_6)$ entonces no hay ninguna solución positiva u de (P_{λ_*}). Esto se prueba fácilmente observando que la única solución de (P_{λ_*}) es la solución trivial. En efecto, si u es solución de (P_{λ_*}), entonces $u \geq 0$ y tomando u como función test se deduce de (A_2) y $(\tilde{f}_6)$ que

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \leq \int_{\Omega} A(x,u)\nabla u \cdot \nabla u = \int_{\Omega} f(\lambda_*, x, u)u \leq 0,$$

lo que significa que $u \equiv 0$. Finalmente, como $\lambda_* \leq 0$ también tenemos que $\lambda_* \leq \text{mín}\{\lambda_0, \lambda_\infty\}$. Esto concluye la primera parte del teorema.

Para probar *(ii)* recordamos que $(\tilde{f}_6)$ implica que

$$\mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_0, \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_\infty \subset (\lambda_*, +\infty).$$

Además, afirmamos que *para todo $\lambda \geq \lambda_*$ no hay ninguna solución u of (P_λ) con $\|u\|_0 = \overline{s}$.* En efecto, razonemos por contradicción y supongamos que existe $\lambda \geq \lambda_*$ y una solución u de (P_λ) con $\|u\|_0 = \overline{s}$. Puesto que $f(\lambda, \cdot, \cdot)$ es C^1 en $\overline{\Omega} \times [0, \infty)$, existe $m \geq 0$ tal que $f(\lambda, x, s) + ms$ es creciente en $s \in [0, \overline{s}]$. Entonces $w = u$ es solución de la siguiente ecuación lineal.

$$L(w) := -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla w) + mw = f(\lambda, x, u) + mu, \text{ en } \Omega.$$

Por otra parte, puesto que $f(\lambda, x, \overline{s}) \leq 0$, entonces

$$L\overline{s} \geq f(\lambda, x, \overline{s}) + m\overline{s}.$$

restando las dos expresiones anteriores obtenemos

$$L(\overline{s} - u) \geq 0, \text{ en } \Omega, \overline{s} - u > 0, \text{ en } \partial\Omega.$$

Puesto que los coeficientes de la matriz $A(x,u)$ son funciones $C^1(\overline{\Omega})$ podemos deducir del Principio del máximo fuerte que $\overline{s} - u > 0$ in $\overline{\Omega}$, lo cual contradice que $\|u\|_0 = \overline{s}$ y así probamos la afirmación anterior.

En particular, obtenemos las inclusiones

$$\Sigma_0 \subset \{(\lambda, u) \,/\, \|u\|_0 < \overline{s}\} \text{ y } \Sigma_\infty \subset \{(\lambda, u) \,/\, \|u\|_0 > \overline{s}\},$$

y, además, $\Sigma_0 \cap \Sigma_\infty = \emptyset$. Entonces, concluimos la prueba observando que la naturaleza global de las bifurcaciones conduce a $[\lambda_0, +\infty) \subset \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_0$ y $(\lambda_\infty, +\infty) \subset \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_\infty$, lo cual implica que para todo $\lambda > \text{máx}\{\lambda_0, \lambda_\infty\}$, tengamos dos soluciones positivas de (P_λ), una en Σ_0 y otra en Σ_∞. □

NOTAS 5.3. i) El Teorema 5.1 extiende al caso de operadores casi-lineales el Teorema A en [**10**]. Más aún, aplicando el Teorema 5.1 es posible abarcar también no-linealidades que tengan distinto comportamiento en el origen y en infinito.

ii) Notemos también que si las condiciones $(\tilde{f}_{5,6})$ se satisfacen a la vez, entonces los continuos Σ_0, Σ_∞ emanando, respectivamente, de cero y de infinito, son el mismo conjunto, es decir $\Sigma_0 = \Sigma_\infty$.

V.2. Problemas sublineales en infinito. Un teorema de unicidad.

A continuación pretendemos extender a nuestro ambiente casi-lineal los resultados de existencia y unicidad de soluciones positivas conocidos, tanto en el caso semi-lineal como en el del p-Laplaciano, para no-linealidades cóncavas y sublineales en infinito (del tipo $f(s) = s^q$, $0 < q < 1$). Concretamente, probamos el siguiente teorema

TEOREMA 5.4. *Supongamos que se satisfacen las condiciones* (A_{1-4}), $(\tilde{f}_1)$, $(\tilde{f}_{3-4})$, $(\tilde{f}'_3)$, *y* $(\tilde{f}_6)$. *Consideremos también que* $f(\lambda, x, 0) = 0$ *a.e.*

$x \in \Omega$ y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(\lambda, x, s)}{s} = 0, \text{ uniformemente para } x \in \Omega, \ \forall \lambda \geq \lambda_*, \tag{5.1}$$

donde λ_* viene dado por $(\tilde{f}_6)$. Entonces existe al menos una solución positiva de (P_λ) para todo $\lambda \geq \lambda_0$.

Nota 5.5. Bajo las hipótesis del teorema anterior, el diagrama de bifurcación será como en la Figura 5.

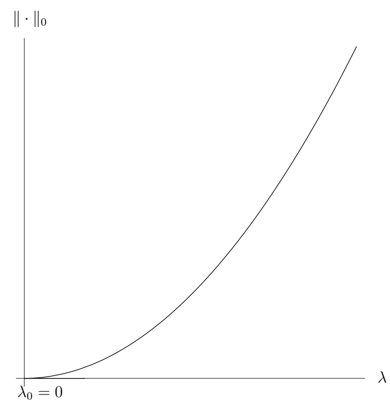

Figura 5

Demostración. Gracias al Teorema 3.9, existe bifurcación desde cero en λ_0. En la prueba del Teorema 5.1, hemos comprobado que la condición $(\tilde{f}_6)$ implica la no existencia de soluciones positivas de (P_{λ_*}). Para concluir es suficiente probar que no hay ningún otro punto de bifurcación desde infinito. En otras palabras, solo necesitamos encontrar cotas *a priori* para las soluciones de (P_λ) en conjuntos acotados de λ. Razonemos por contradicción, y sean $\lambda_n \to \lambda < +\infty$ y u_n una solución no trivial de (P_{λ_n}) con $\|u_n\|_0 \to +\infty$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $z_n \equiv u_n/\|u_n\| \to z$ fuertemente en $L^2(\Omega)$. Entonces, tomando $\dfrac{u_n}{\|u_n\|^2}$ como función test, llegamos a que z_n satisface

$$\int_\Omega A(x,u_n)\nabla z_n\cdot\nabla z_n=\int_\Omega f(\lambda_n,x,u_n)\frac{z_n}{\|u_n\|}.$$

A partir de las condicións (A_2) y $(\tilde{f}_3)$ obtenemos ahora

$$\begin{aligned}\alpha\ \ \leq\ \ &\int_\Omega \frac{f(\lambda_n,x,u_n)}{\|u_n\|}z_n\leq|\lambda_n-\lambda|\int_\Omega\left(K_1(x)z_n+\frac{K_2(x)}{\|u_n\|}\right)z_n\\ &+\int_\Omega\frac{f(\lambda,x,u_n)}{\|u_n\|}z+\int_\Omega\frac{f(\lambda,x,u_n)}{\|u_n\|}(z_n-z).\end{aligned}\tag{5.2}$$

La condición (5.1) implica que $\dfrac{f(\lambda,x,u_n)}{u_n}\to 0$ casi para todo x en $\Omega^+:=\{x\in\Omega\,/\,z(x)>0\}$. Así, por la condición (f_1) (la cual se verifica por $(\tilde{f}_1)$, $(\tilde{f}_3)$ y (5.1)), y el Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue deducimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(\lambda,x,u_n)\frac{z}{\|u_n\|}=\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega^+}\frac{f(\lambda,x,u_n)}{u_n+1}\left(zz_n+\frac{z}{\|u_n\|}\right)=0.$$

Como z_n converge a z y se verifica (f_1), tenemos

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega\frac{f(\lambda,x,u_n)}{\|u_n\|}(z_n-z)=0.$$

Por tanto, tomando límites cuando n tiende a infinito, deducimos de (5.2) que $\alpha\leq 0$, lo cual es una contradicción. □

Nota 5.6. En [**33**] el método de sub y super-solución se usa para probar la existencia de al menos una solución positiva de (P_λ) para todo $\lambda>0$ para la no-linealidad $f(\lambda,x,s)=\lambda s^q$, $0<q<1$. Notemos que este resultado es un caso particular de nuestro teorema con $f'_+(x,0)=+\infty$ $(\lambda_0=0)$. Además, nuestro teorema cubre también casos en los cuales $f'_+(x,0)<+\infty$.

En el caso semi-lineal, es decir $A(x,s) = A(x)$, la unicidad de soluciones positivas de (P_λ) para $\lambda > 0$ y no-linealidades cóncavas $f(\lambda, x, s)$ en la variable s es conocido [**43**] (véase también [**42**]). Con respecto a la extensión de este resultado de unicidad a coeficientes generales $A(x,s)$, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 5.7. *Supongamos que se satisfacen* (A_{1-3}), (2.4) *y existe* $\varepsilon_0 \in (0, +\infty]$ *tal que*

$$A(x,s) \text{ es no decreciente respecto a } s,\ 0 \le s < \varepsilon_0. \qquad (A_6)$$

Sea $\lambda > 0$ *fijo. Supongamos además que se verifica* $(\tilde{f}_1)$, $f(\lambda, x, \cdot)$ *es no decreciente en* $[0, \varepsilon_0)$ *a.e.* $x \in \Omega$ *para cada* $\lambda > 0$ *y*

$$\frac{f(\lambda,x,s)}{s} \text{ es decreciente para } 0 \le s < \varepsilon_0, \text{ a.e. } x \in \Omega, \tag{5.3}$$

$$f(\lambda,x,s) \ge \beta\mu s, \text{ a.e. } x \in \Omega, \quad s \in [0, \varepsilon_0], \tag{5.4}$$

donde μ *denota de nuevo al primer valor propio del operador Laplaciano. Entonces, el problema* (P_λ) *tiene a lo más una solución* u *positiva con* $\|u\|_0 < \varepsilon_0$.

NOTAS 5.8. (1) Bajo hipótesis más fuertes que la anterior, como son

$A(x,s)$ es no decreciente respecto a la variable s para $0 \le s < +\infty$, a.e. $x \in \Omega$,
$\dfrac{f(\lambda,x,s)}{s}$ es decreciente para $0 \le s < +\infty$, a.e. $x \in \Omega$,
$\lim\limits_{s \to 0^+} \dfrac{f(\lambda,x,s)}{s} = +\infty$, uniformemente en Ω,

el Teorema 5.7 implica la unicidad de soluciones positivas de (P_λ).

(2) Respecto a cuando la condición (A_6) se verifica, en el caso que $A(x,s) = a(s)I$, $a(0) > 0$ y $f(\lambda,x,s) = f(s)$, realizando el

cambio de variables $v = \hat{a}(u)$, donde $\hat{a}(s) = \int_0^s a(t)dt$ obtenemos que (P_λ) es equivalente al siguiente b.v.p. semi-lineal

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta v(x) & = & (f \circ \hat{a}^{-1})(v(x)), & x \in \Omega, \\ v(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Teoremas de unicidad son conocidos (véase [**43**]) si la función compuesta $f \circ \hat{a}^{-1}$ es cóncava. Este es el caso cuando la hipótesis (A_6) y (5.3) se satisfacen en este caso.

Demostración. Razonemos por contradicción y supongamos que u_1 y u_2 sean dos soluciones distintas de (P_λ) con $\|u_i\|_0 < \varepsilon_0$, $i = 1, 2$. Afirmamos que entonces *es posible elegir* u_1 *y* u_2 *tales que* $u_1 \leq u_2$. En efecto, recordemos que en [**37**] se prueba que para cada $r > 0$ existen $u_r \in \overset{\circ}{P} \subset E$ y $\lambda_r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|u_r\|_r = r$ y

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x, u_r)\nabla u_r) & = & \lambda_r u_r, & x \in \Omega, \\ u_r & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Más aún, tenemos que $\|u_r\|_0 \leq c_0\lambda_r r$. Siguiendo los mismos argumentos de [**33**], por (5.4), para $r > 0$ suficientemente pequeño, u_r es subsolución de (P_λ). Puesto que, por el Lema 2.6, u_1 y u_2 están en $\overset{\circ}{P}$, tenemos para r suficientemente pequeño que $u_r \leq \min\{u_1, u_2\}$. Así, por el método de sub y super-solución existe w_1 solución de (P_λ) tal que

$$u_r \leq w_1 \leq u_1, \quad \text{y} \quad u_r \leq w_1 \leq u_2.$$

Por tanto, hemos obtenido dos soluciones distintas y ordenadas: bien w_1 y u_1, o bien w_1 y u_2. En consecuencia, podemos suponer que $u_1 \leq u_2 < \varepsilon_0$, y $u_1 \not\equiv u_2$. Tomemos u_2^2/u_1 como función test en la ecuación que satisface u_1 y obtenemos

$$\int_\Omega A(x,u_1)\nabla u_1 \cdot \left(2\frac{u_2}{u_1}\nabla u_2 - \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 \nabla u_1\right) = \int_\Omega \frac{f(\lambda,x,u_1)}{u_1} u_2^2.$$

Ahora, tomando u_2 como función test en la ecuación satisfecha por u_2 resulta

$$\int_\Omega A(x,u_2)\nabla u_2 \cdot \nabla u_2 = \int_\Omega \frac{f(\lambda,x,u_2)}{u_2} u_2^2.$$

observando que $u_1 \leq u_2 < \varepsilon_0$ deducimos de (A_6) que $A(x,u_2) - A(x,u_1)$ es definida no negativa, y restando ambas igualdades obtenemos de (5.3) que

$$\begin{aligned} 0 \ &\geq \ -\int_\Omega A(x,u_1)\left(\nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right) \cdot \left(\nabla u_2 - \frac{u_2}{u_1}\nabla u_1\right) \\ &\quad -\int_\Omega \left[A(x,u_2) - A(x,u_1)\right] \nabla u_2 \cdot \nabla u_2 \\ &= \ \int_\Omega \left(\frac{f(\lambda,x,u_1)}{u_1} - \frac{f(\lambda,x,u_2)}{u_2}\right) u_2^2 > 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción. □

V.3. Problemas superlineales en infinito.

A continuación trabajaremos con no-linealidades f superlineales en infinito. Específicamente, estudiamos el caso en que f verifica una condición equivalente a (f_4), es decir, existe $p \in (1, 2^* - 1)$ y una función h acotada, tal que para todo intervalo real compacto Λ,

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(\lambda,x,s)}{s^p} = h(x) \geq c > 0, \quad \text{uniformemente } x \in \Omega, \lambda \in \Lambda. \tag{5.5}$$

Observemos en primer lugar que la cota *a priori* probada en el Teorema 4.4 sigue siendo cierta para las soluciones de (P_λ) con λ en intervalos compactos, sustituyendo la condición (f_4) por (5.5). Así, podemos probar el siguiente resultado de existencia y multiplicidad de soluciones de (P_λ) para este tipo de no-linealidades.

TEOREMA 5.9. *Supongamos que* $f(\lambda, x, 0) = 0$, *a.e.* $x \in \Omega$, *para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$ *y que las condiciones* $(\tilde{f}_1)$, $(\tilde{f}'_3)$, $(\tilde{f}_{4-5})$, (5.5), (2.4) *y* (A_{1-3}) *son satisfechas. Sea* λ_0 *dado por* (3.9). *Existe* $\Lambda^* \geq \overline{\lambda} \geq \lambda_0$ *tal que* (P_λ) *tiene al menos una solución positiva para todo* $\lambda \leq \overline{\lambda}$ *y ninguna solución positiva para* $\lambda > \Lambda^*$. *Además, si o bien* $\lambda_0 > 0$ *y se tienen las hipótesis del item (ii) del Teorema* 3.9 *o bien* $\lambda_0 = 0$ *(es decir,* $f'_+(x, 0) = +\infty$, *para todo* $x \in \Omega$*) y se satisface* (3.14), *entonces* $\overline{\lambda} > \lambda_0$ *y para todo* $\lambda \in (\lambda_0, \overline{\lambda})$ *existen al menos dos soluciones positivas.*

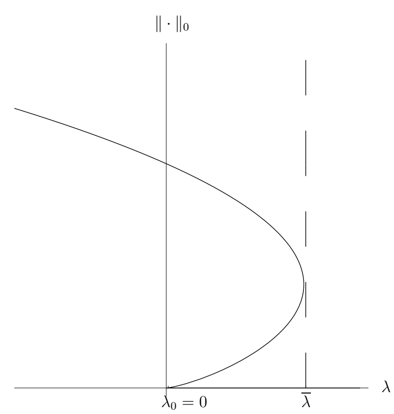

FIGURA 6

NOTA 5.10. Bajo las hipótesis del Teorema 5.9 una vez más vemos que el estudio del lado de la bifurcación desde $(\lambda_0, 0)$ es esencial. Si esta ocurre hacia la izquierda (por ejemplo, si $\lambda_0 > 0$ y se verifican las hipótesis del Teorema 3.9-*(i)*) sólo podemos deducir la existencia de al menos una solución positiva para $\lambda < \lambda_0$. Por otra parte, si ocurre hacia la derecha (por ejemplo, si bien $\lambda_0 > 0$ y se verifican las hipótesis del Teorema 3.9-*(ii)* o bien $\lambda_0 = 0$ y se verifica (3.14)), entonces $\overline{\lambda} > \lambda_0$

y obtenemos la existencia de al menos dos soluciones positivas para λ en un entorno a la derecha de λ_0, (véase Fig. 6).

DEMOSTRACIÓN. Puesto que se satisfacen las hipótesis del Teorema 3.9, de λ_0 emana un continuo no acotado $\Sigma_0 \subset \Sigma$. Por $(\tilde{f}_5)$, como hemos visto en la prueba del item *(i)* del Teorema 5.1, existe una cota superior *a priori* para el conjunto de valores λ para los cuales existe solución de (P_λ). Así,

$$\Lambda^* \equiv \sup\{\lambda \in \mathbb{R};\ \exists u \in E \setminus \{0\} \text{ solución of } (P_\lambda)\} < +\infty,$$

y $\mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_0$ es un intervalo real acotado superiormente por Λ^*. Por lo tanto, si $\overline{\lambda}$ es el supremo de $\mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_0$, entonces $\lambda_0 \in \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_0 \subset (-\infty, \overline{\lambda}]$. Usando ahora el Teorema 4.4 y que Σ_0 es no acotado, también deducimos que $(-\infty, \overline{\lambda}] \subset \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_0$. Esto prueba la primera parte del Teorema. Si, o bien $\lambda_0 \neq 0$ y se verifican las hipótesis del item *(ii)* del Teorema 3.9 o bien $\lambda_0 = 0$ y se satisface (3.14), entonces la bifurcación es supercrítica y por tanto $\lambda_0 < \overline{\lambda}$. Obtenemos pues la existencia de al menos dos soluciones positivas para todo $\lambda \in (\lambda_0, \overline{\lambda})$. $\square$

Una cuestión permanece aún abierta en el Teorema 5.9. Es natural interesarse por saber cuando el continuo Σ_0 ofrece el intervalo maximal de valores λ para los que existe solución positiva de (P_λ); es decir, ¿$\overline{\lambda} = \Lambda^*$?. Podemos probar que la respuesta es afirmativa para la clase particular de matrices $A(x,s)$ que verifican (A_5). Con respecto a $f(\lambda, x, s)$, suponemos que $f(\lambda, x, 0) = 0$ a.e. $x \in \Omega$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y f es no decreciente en s. Necesitaremos probar el siguiente teorema.

TEOREMA 5.11. *Supongamos la hipótesis (A_5), que $f(\lambda, x, 0) = 0$ a.e. $x \in \Omega$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y que f es no decreciente en s. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, y sea $\Sigma_0 \subset I \times C_0^1(\overline{\Omega})$ un conjunto conexo de soluciones* *de* (P_λ). *Consideremos una transformación continua* $\mathcal{T} : I \to C_0^1(\overline{\Omega})$ *tal que* $\mathcal{T}(\lambda)$ *es una super-solución de* (P_λ), *que no es solución. Si existe* $(\lambda_0, u_0) \in \Sigma_0$ *con* $u_0 \leq \mathcal{T}(\lambda_0)$ *en* Ω, *entonces* $u \leq \mathcal{T}(\lambda)$ *en* Ω, $\forall (\lambda, u) \in \Sigma_0$.

Demostración. Este teorema es una extensión a operadores casi-lineales del resultado en [**66**, Theorem 2.2]. Razonando de la misma forma que en [**66**] notamos que es suficiente usar en lugar del Lema 2.1 de [**66**], la extensión casi-lineal que supone el Lema 4.9. □

Podemos dar ahora una respuesta positiva parcial a la pregunta que nos hacíamos anteriormente con el siguiente resultado.

Teorema 5.12. *Supongamos, además de las hipótesis del Teorema* 5.9, *la condición* (A_5) *y que* f *sea no decreciente en* s. *Si existe una función* ℓ *positiva no decreciente verificando*

$$f(\lambda, x, s) < 0, \quad \forall \lambda < -\ell(s),\ a.e.\ x \in \Omega,\ s \in \mathbb{R}^+,$$

entonces las constantes Λ^* *y* $\overline{\lambda}$ *dadas en el Teorema* 5.9 *son la misma, es decir, el problema* (P_λ) *tiene soluciones positivas si, y sólo si* $\lambda \leq \overline{\lambda} = \Lambda^*$. *Más aún, este resultado es consecuencia de la existencia de un continuo* $\Sigma_0 \subset \mathbb{R} \times E$ *de soluciones de* (P_λ) *que ofrece el intervalo maximal de valores* λ *para los que existe solución positiva de* (P_λ).

Demostración. Afirmamos que *si* u_n *es una sucesión de soluciones positivas de* (P_{λ_n}) *con* $\lambda_n \to -\infty$ *entonces* $\|u_n\|_0 \to +\infty$. En efecto, si por el contrario $\|u_n\|_0 \leq s_0$ entonces para $\lambda_n < -\ell(s_0)$, tendríamos que $f(\lambda_n, x, u_n) < 0$, y tomando u_n como función test, por (A_2) tendríamos que $u_n = 0$, una contradicción que prueba la afirmación anterior. Así, el continuo no acotado Σ_0 de soluciones positivas emanando desde cero, cuya existencia asegura el Teorema 3.9, conecta

$(\lambda_0, 0)$ y $(-\infty, +\infty)$. Para probar el teorema, es bastante probar que *si para* $\Lambda > \lambda_0$ *el problema* (P_Λ) *admite solución positiva, entonces* $\Lambda \in \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_0$. Supongamos que (P_Λ) tiene una solución positiva u_Λ. Entonces u_Λ es una super-solución de (P_λ) para todo $\lambda \in (-\infty, \Lambda) \equiv I$ y tomando $\mathcal{T}(\lambda) = u_\Lambda$ para todo $\lambda < \Lambda$, deducimos del Teorema 5.11 que $\Sigma_0 \cap (I \times E)$ no atraviesa $u = u_\Lambda$ y la única forma de conectar $(\lambda_0, 0)$ y $(-\infty, +\infty)$ es que Σ_0 cruce la región $\lambda \geq \Lambda$. En particular, $\Lambda \in \mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\, \Sigma_0$. $\square$

V.4. Problemas del tipo Ambrosetti-Rabinowitz.

En esta sección estudiamos el caso de no-linealidades superlineales en $+\infty$ ($\displaystyle\lim_{u\to+\infty} \frac{f(x,u)}{u} = +\infty$) y sublineales en cero ($\displaystyle\lim_{u\to 0^+} \frac{f(x,u)}{u} = 0$). Este tipo de problemas fue estudiado por primera vez en el famoso trabajo de Ambrosetti-Rabinowitz [**14**]. Por nuestra parte, obtenemos una versión casi-lineal de este resultado como una consecuencia directa del estudio hecho del problema de Ambrosetti-Prodi superlineal. Concretamente consideramos una función de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, 0) = 0$ a.e. $x \in \Omega$, verificando (f_4) y

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{s} = \gamma < \alpha\mu, \quad \text{uniformemente en } x \in \Omega. \tag{f_5}$$

Estamos interesados en la existencia de soluciones no triviales y no negativas (positivas) para el problema (0.1) con este tipo de no-linealidades. Sea $\tilde{f} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la truncadura de f dada por

$$\tilde{f}(x, s) \equiv f(x, s^+),\ x \in \Omega.$$

Notemos que, al igual que en el Teorema 2.6, gracias al principio de máximo, toda solución no trivial de

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) & = & \tilde{f}(x,u), & x \in \Omega, \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{5.6}$$

es una solución positiva de (0.1). De este modo, la búsqueda de soluciones positivas de (0.1) se reduce a buscar soluciones no triviales de (5.6). Puesto que $\tilde{f}$ satisface claramente las condiciones $(f'_{1,3})$ y $(f_{2,4,5})$, el problema (5.6) se enmarca dentro del problema de Ambrosetti-Prodi "superlineal" (problema (Q_t) con t=0 y alguna función φ). Aplicando el Teorema 4.12 probamos:

Teorema 5.13. *Supongamos que A satisface (A_5) para alguna función a con $\lim\limits_{s\to+\infty} a(s) = \lim\limits_{s\to-\infty} a(s)$. Supongamos también que f es una función de clase $C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^+)$ verificando (f_{4-5}) y que $f(x,\cdot)$ es creciente a.e. $x \in \Omega$. Entonces el problema (0.1) tiene al menos una solución positiva.*

Demostración. El esbozo de la prueba es el siguiente. Primero (*Paso* 1) introducimos el problema dentro de un problema uniparamétrico (Q_t) para una función φ convenientemente elegida. Después (*Paso* 2) usamos los resultados de la Sección IV.3 probando que t^* definido en el Teorema 4.7 es estrictamente positivo.

Paso 1. Elección de φ.

En [**37**] se prueba que para todo $r > 0$ existe una solución positiva $u_r \in P$ del problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u_r)\nabla u_r) & = & \mu_r u_r & x \in \Omega, \\ u_r & = & 0 & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

con $\alpha\mu \le \mu_r \le \beta\mu$ y $\|u_r\|_0 \le c\,r$, para alguna constante positiva c.

Afirmamos ahora que *existe* $r \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\mu_r > \dfrac{f(x,u_r)}{u_r}$ *a.e.* $x \in \Omega$. En efecto, por (f_5) existen $\delta \in \mathbb{R}^+$ y $\gamma_1 \in (\gamma, \alpha\mu)$ tales que $\dfrac{f(x,s)}{s} \leq \gamma_1$ siempre que $s < \delta$. Tomando $r < \delta/c$ tenemos que $\|u_r\|_0 \leq \delta$, Así

$$\frac{f(x,u_r)}{u_r} \leq \gamma_1 < \alpha\mu \leq \mu_r, \quad \text{a.e.} x \in \Omega$$

lo cual prueba la afirmación.

Tomando ahora $t \in (0, \mu_r - \gamma_1)$ conseguimos

$$-\mathrm{div}(A(x,u_r)\nabla u_r) = \mu_r u_r \geq f(x,u_r) + tu_r,$$

es decir, u_r es una super-solución de

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) & = & \tilde{f}(x,u) + tu & x \in \Omega, \\ u & = & 0 & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Sea $\varphi(x) = u_r$, y recordemos que $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$. Para estar en la situación de la Sección IV.3, vemos el problema (0.1) dentro del problema uniparamétrico

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) & = & \tilde{f}(x,u) + t\varphi & x \in \Omega, \\ u & = & 0 & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\} \qquad (\tilde{Q}_t)$$

Paso 2. Denotemos $\tilde{S} \equiv \{t \in \mathbb{R} : (\tilde{Q}_t) \text{ admite solución}\}$. Sabemos por el *Paso* 1 que φ es super-solución de $(\tilde{Q}_{t_0})$ para algún $t_0 > 0$. Razonando como en el Teorema 4.7 existe $\underline{u}$ subsolución de $(\tilde{Q}_{t_0})$ con $\underline{u} \leq \varphi$. El método de sub y super-solución nos permite deducir que $(\tilde{Q}_{t_0})$ tiene al menos una solución. Por lo tanto, $0 < t_0 \in \tilde{S}$ y así $0 < \tilde{t}^*$, donde $\tilde{t}^* = \sup \tilde{S}$ viene dado por el Teorema 4.8 aplicado al problema $(\tilde{Q}_t)$. Más aún, el item 1 de dicho Teorema muestra la existencia de al menos dos soluciones de (Q_0), o equivalentemente la existencia de dos soluciones no negativas de (0.1). Teniendo en cuenta que (f_5) implica que cero es solución de este problema, deducimos que existe al menos una solución positiva de (0.1). □

V.5. Comentarios Finales.

La evidente restricción que supone la condición (A_5) sobre la clase de operadores que consideramos en los Teoremas 5.12 y 5.13 podría ser evitada si probásemos un principio de comparación fuerte, tipo Lema de Hopf, para este tipo de operadores. Concretamente necesitamos probar que, *dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ con frontera $\partial\Omega$ suficientemente regular, supuesto que los coeficientes de la matriz $A(x,s)$ sean funciones de clase $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ y dadas $h_1, h_2 \in L^r(\Omega)$, $r > N$, con $h_1 \leq h_2$, si consideramos que $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ sean soluciones de*

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u_i)\nabla u_i) & = & h_i, & x \in \Omega, \\ u_i & = & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

entonces $u_1(x) < u_2(x)$ para cada $x \in \Omega$ y $\dfrac{\partial u_1}{\partial n}(x) > \dfrac{\partial u_2}{\partial n}(x)$ para cada $x \in \partial\Omega$.

Este resultado permitiría extender el Lema 4.9 al caso de matrices $A(x,s)$ generales, es decir, si se verifica (2.4), para cada super-solución, $\overline{u} \in C_0^1(\overline{\Omega})$, de (Q_t) que no sea solución y $u \in C_0^1(\overline{\Omega})$ solución de (Q_t) tal que $\overline{u} \geq u$. Entonces, $\overline{u}(x) > u(x)$ en Ω y $\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial n} < \dfrac{\partial u}{\partial n}$ en $\partial\Omega$.

Por otra parte, si queremos evitar el uso de este lema debemos buscar cuidadosamente otro conjunto abierto $O \subset \mathbb{R} \times E$ de manera que notando por $O_t \equiv \{u \in E : (t,u) \in O\}$, tengamos que (Q_t) no admita solución en ∂O_t para cada $t' \in [t, t^*)$ y el grado topológico

$$\deg(\Phi_t, O_t, 0) \neq 0.$$

Otra cuestión que merece la pena ser estudiada en este ambiente casi-lineal será considerar otro tipo de no-linealidades f para las que son conocidos otros diagramas de bifurcación en el caso semi-lineal. Concretamente podemos considerar el problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) & = & \lambda f(u), & x \in \Omega, \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\} \tag{5.7}$$

siendo $f(s) > 0$ para cada $s \in \mathbb{R}^+$. Considerando distintas hipótesis sobre la función f son conocidos resultados donde se obtienen diagramas de bifurcación en forma de S, es decir existencia de al menos tres soluciones para valores de λ en un cierto intervalo. Podemos citar, por ejemplo, [**83, 87**] para el operador Laplaciano, [**41, 99**] para operadores lineales elípticos de segundo orden generales y [**25**] para el caso del operador p-Laplaciano.

Notas Finales.

Concluiremos el desarrollo de esta Memoria con la exposición de algunos problemas y cuestiones que nos hemos planteado durante el desarrollo de la misma. Surgen de su lectura numerosas preguntas, algunas de rápida respuesta y otras no tan simples. Estos problemas se pueden considerar como posibles líneas en las que podemos dirigir nuestro trabajo de investigación a partir de ahora.

No-linealidades con asíntotas

Consideramos en primer lugar, el problema de existencia de soluciones positivas para problemas de contorno con no-linealidades que tienen una asíntota vertical. Concretamente, tomamos $A \in \mathbb{R}^+$ y $h : [0, A) \to \mathbb{R}$ una función continua verificando

$$\lim_{s \to A^-} h(s) = +\infty. \tag{h_1}$$

Consideremos, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, el problema de contorno:

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda h(u), & x \in \Omega, \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{5.8}$$

Diremos que $u \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ es solución positiva del problema anterior si $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$, $\|u\|_0 < A$ y satisface la ecuación en sentido débil, es decir,

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w = \lambda \int_{\Omega} h(u) w, \ \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{5.9}$$

Para el estudio de este problema pretendemos transformarlo en otro equivalente para el cual la no-linealidad este definida en toda la semirecta real positiva. El precio que "pagaremos"para ello será que el operador diferencial lineal laplaciano se transformará en un operador casi-lineal. Para llevar a cabo la transformación, emplearemos un cambio de variable usado en [**89**]. En efecto, sea $\Phi : [0, +\infty) \to [0, A)$ una biyección de clase C^1, con $\Phi'(s) > 0$ para cada $s \in [0, +\infty)$ (en particular, Φ es estrictamente creciente). Realizando el cambio de variable $u = \Phi(v)$, tenemos el siguiente resultado

LEMA 5.14. *Sea h una función continua verificando (h_1). Se tiene que, $u \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ es solución del problema (5.8) si y sólo si, $v = \Phi^{-1}(u) \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ es solución débil del problema*

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(\Phi'(v)\nabla v) & = & \lambda h(\Phi(v)), & x \in \Omega, \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{5.10}$$

Si además suponemos que $\Phi \in C^2(0, +\infty)$, entonces el problema es equivalente al de existencia de soluciones débiles, $v \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$, del problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta v - \dfrac{\Phi''(v)}{\Phi'(v)}|\nabla v|^2 & = & \lambda \dfrac{h(\Phi(v))}{\Phi'(v)}, & x \in \Omega, \\ u & = & 0, & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\} \tag{5.11}$$

□

NOTAS 5.15. (1) Por solución débil del problema 5.11 entendemos, una función $u \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ tal que $\dfrac{\Phi''(v)}{\Phi'(v)}|\nabla v|^2 \in$

$L^1(\Omega)$ y para cada $\varphi \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi - \int_\Omega \frac{\Phi''(v)}{\Phi'(v)} |\nabla v|^2 \varphi = \lambda \int_\Omega \frac{h(\Phi(v))}{\Phi'(v)} \varphi.$$

(2) El operador $-\mathrm{div}(\Phi'(v)\nabla v)$ que aparece en la parte izquierda de la ecuación (5.10) no es en general uniformemente elíptico (la matriz $\Phi'(s)I$ no verifica en general la condición (A_2)). Por ejemplo, si existe el límite $\lim_{s\to\infty} \Phi'(s)$, entonces, por la Regla de L'hôpital y la acotación de Φ, tenemos que

$$\lim_{s\to\infty} \Phi'(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{\Phi(s)}{s} = 0.$$

(3) Si $h(s) > 0$ para cada $s > 0$, la no-linealidad $\dfrac{h \circ \Phi}{\Phi'}$ para el problema (5.11) nunca es asintóticamente lineal ni acotada. En efecto, basta probar que $g(s) = \dfrac{h \circ \Phi(s)}{s\Phi'(s)}$ es no acotada. Para ello, usando el cambio de variable $r = \Phi(t)$, observamos que

$$\int_1^s \frac{\mathrm{d}t}{tg(t)} = \int_1^s \frac{\Phi'(t)\mathrm{d}t}{h(\Phi(t))} = \int_{\Phi(1)}^{\Phi(s)} \frac{\mathrm{d}r}{h(r)} < \int_{\Phi(1)}^{A} \frac{\mathrm{d}r}{h(r)} < \infty,$$

y pasando al límite cuando $s \to \infty$

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{tg(t)} < +\infty. \tag{5.12}$$

Por otra parte, si g estuviese acotada por $M \in \mathbb{R}^+$, tendríamos

$$\int_{s_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{tg(t)} > \frac{1}{M} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} = +\infty,$$

lo cual contradice (5.12). Queda probado entonces que el problema nunca es asintóticamente lineal ni acotado.

(4) Supongamos que $h(s) > 0$ para cada $s > 0$. Sea $a \in (0, A)$ y consideremos la función $H : [a, A] \to \mathbb{R}$ dada por $H(s) =$

$\displaystyle\int_a^s \frac{\mathrm{d}r}{h(r)}$ para cada $s \in [a, A]$. Dado $p > 1$ podemos tomar $s_0 = ((p-1)H(A))^{1/(1-p)}$ y definir la función

$$\Phi(s) = H^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{s_0^{p-1}} - \frac{1}{s^{p-1}}\right)\right),\ s \geq s_0.$$

Es claro que $\Phi \in C^1(s_0, +\infty)$ y $\Phi'(s) > 0$ para cada $s \geq s_0$. Denotando de nuevo por Φ a una extensión suya de clase $C^1(0, +\infty)$, con $\Phi(0) = 0$ y $\Phi'(s) > 0$ para cada $s \geq 0$, se tiene que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{h(\Phi(s))}{s^p \Phi'(s)} = 1. \tag{5.13}$$

(5) Un modelo particular a tener en cuenta sería el problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda(\operatorname{tg} u)^m, & x \in \Omega, \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\}$$

con $m \in \mathbb{R}^+$. Para este problema podemos realizar el cambio de variable $u = \operatorname{arc\,tg} v$ para obtener, según el Lema 5.14, que $u \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$, $\|u\|_0 < \pi/2$ es solución positiva del problema anterior si y sólo si $v = \operatorname{tg} u \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega})$ es solución débil del problema

$$\left.\begin{array}{rcll} -\mathrm{div}(\dfrac{\nabla v}{1+v^2}) &=& \lambda v^m, & x \in \Omega, \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

o equivalentemente del problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta v + \dfrac{2v}{1+v^2}|\nabla v|^2 &=& \lambda v^m(1+v^2), & x \in \Omega, \\ u &=& 0, & x \in \partial\Omega. \end{array}\right\}$$

Observemos que, las soluciones débiles continuas del problema (5.8) son justamente los ceros del operador Ψ_λ definido en $E = \{u \in H_0^1(\Omega) \cap C_0(\overline{\Omega}) :\ \|u\|_0 < A\}$ por

$$\Psi_\lambda(u) \equiv u - \lambda(-\Delta)^{-1}(h(u)),\quad u \in E.$$

Observemos que si $u \in E$ entonces, de la continuidad de h se deduce que $h(u) \in L^\infty(\Omega)$ y del Teorema de De Giorgi-Stampacchia (véase Nota 2.3 − 2) que $(-\Delta)^{-1}(h(u)) \in C_0(\overline{\Omega})$. Así, $\Psi_\lambda : E \to C_0(\overline{\Omega})$ está bien definida.

Supongamos además que $h(0) = 0$ (es decir, $(\lambda, 0)$ es solución trivial de (5.8), para todo $\lambda \in \mathbb{R}$) y

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{h(s)}{s} = h'(0), \tag{h_2}$$

donde $h'(0) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Sea λ_0 dado por

$$\lambda_0 = \begin{cases} 0 & \text{si } h'(0) = +\infty, \\ \lambda_1 / h'(0) & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{5.14}$$

Notemos por Σ al cierre en $\mathbb{R} \times E$ del conjunto de pares de la forma $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E \setminus \{0\}$ con $\Psi_\lambda(u) = 0$, es decir

$$\Sigma = \mathrm{cl}\{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E \setminus \{0\} : \ \ \Psi_\lambda(u) = 0\}.$$

Bajo estas condiciones, podemos seguir la misma demostración de los Lemas 3.6 y 3.8 con $\delta < A$, para probar la siguiente proposición

Proposición 5.16. *Supongamos que h verifique (h_{1-2}) y $h(0) = 0$. λ_0 es un punto de bifurcación de (5.8) desde la solución trivial y es el único para soluciones positivas. Más aún, existe un continuo Σ_0 en Σ "emanando" de $(\lambda_0, 0)$ de manera que o bien $\mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\Sigma_0$ es no acotado, o bien $\overline{\Sigma}_0 \cap (\mathbb{R} \times \partial E) \neq \emptyset$ (cierre tomado en todo el espacio $C_0(\overline{\Omega})$). Además, la bifurcación es supercrítica si $\lambda_0 = 0$, mientras que si $\lambda_0 > 0$, se verifican las siguientes conclusiones*

(i) si existe $\sigma < 0$ tal que $\underline{\mu} = \liminf_{s \to 0^+} [h(s) - h'(0)s]\, s^{\sigma - 1} > 0$, entonces la bifurcación de soluciones positivas en $\lambda = \lambda_0$ es subcrítica,

(ii) si existe $\sigma < 0$ tal que $\overline{\mu} = \limsup_{s \to 0^+} [h(s) - h'(0)s]\, s^{\sigma - 1} < 0$, entonces la bifurcación de soluciones positivas en $\lambda = \lambda_0$ es supercrítica.

DEMOSTRACIÓN. La prueba es la misma del Teorema 3.9, observando que el Teorema 1.7 sigue siendo cierto para operadores compactos definidos no en todo un espacio de Banach X, sino en un subconjunto abierto suyo, E, para obtener, en este caso, como alternativa, que o bien el continuo retorna a otro punto de bifurcación desde cero, o bien su proyección a $\mathbb{R}$ es no acotada, o bien contiene una sucesión de pares (λ_n, u_n) de manera que $\lim_{n\to\infty} u_n \in \partial E$. $\square$

NOTA 5.17. Siguiendo los mismos pasos de la demostración del Teorema 5.1-*(ii)* podemos dar condiciones sobre h para determinar explícitamente el comportamiento del continuo de soluciones obtenido en la proposición anterior, aunque en ese caso la existencia de asíntota no es determinante. Concretamente, supongamos que h verifique, además de (h_{1-2}) y $h(0) = 0$, que $h(s_0) \leq 0$ para algún $s_0 \in (0, A)$. Entonces existe un continuo Σ_0 en Σ "emanando"de $(\lambda_0, 0)$ de manera que $\mathrm{Proy}_{\mathbb{R}}\Sigma_0$ es no acotado. Para ello, se prueba que no existen soluciones de (5.8) de norma s_0. Esto produce que el continuo Σ_0 obtenido en el Teorema 5.16 tenga que tener proyección no acotada en $\mathbb{R}$.

A continuación probaremos un resultado donde se obtienen condiciones suficientes que aseguran la segunda opción sobre el comportamiento del continuo de soluciones obtenido en la prueba de la Proposición 5.16.

TEOREMA 5.18. *Supongamos que, además de (h_{1-2}) y $h(0) = 0$, existe $c \in \mathbb{R}^+$ con*

$$h(s) \geq cs,\ \forall s \in (0, A). \qquad (h_3)$$

Entonces existe un continuo Σ_0 en Σ "emanando"de $(\lambda_0, 0)$ de manera que $\overline{\Sigma}_0 \cap (\mathbb{R} \times \partial E) \neq \emptyset$ (donde $\overline{\Sigma}_0$ denota el cierre de Σ_0 tomado en todo el espacio $C_0(\overline{\Omega})$).

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que existen $\lambda_*, \lambda^* \in \mathbb{R}$ tales que si (5.8) tiene solución, entonces $\lambda \in [\lambda_*, \lambda^*]$. Gracias a (h_3) sabemos que $h(s) > 0$ para cada $s > 0$ y por tanto podemos tomar $\lambda_* = 0$. Por otra parte, tomando $w = \varphi_1$ (primera autofunción positiva normalizada del operador Laplaciano) como función test en (5.9) se tiene que $\lambda \leq \dfrac{\lambda_1}{c}$, así pues, tomamos $\lambda^* = \dfrac{\lambda_1}{c}$. □

Del teorema anterior se deduce la existencia de una sucesión de pares (λ_n, u_n), con $u_n \in E$ solución de (5.8) para $\lambda = \lambda_n$, de manera que $u_n \to u \in C_0(\overline{\Omega})$ con $\|u\|_0 = A$. Nada podemos asegurar sin embargo del comportamiento de la sucesión λ_n. Pensamos no obstante que será posible demostrar que pasando a una subsucesión si fuese necesario, $\lambda_n \to 0$ (véase Fig. 7). Para ello recordamos, como fue observado en la Nota 5.15$-$4, que dado $1 < p < 2^* - 1$ es posible encontrar una función Φ verificando (5.13). En el caso semi-lineal, para no linealidades que tienen este comportamiento en infinito, es conocida la existencia de una estimación *a priori* sobre la norma en $C_0(\overline{\Omega})$ de toda posible solución. Una cota de este tipo para el problema (5.11) supondrá que el único *punto de bifurcación desde* A para (5.8) es el cero, es decir, la conjetura anterior sería cierta.

Operador *p-Laplaciano*

Esta Memoria constituye un primer paso en el estudio de operadores en forma de divergencia generales. El siguiente será considerar operadores más generales, incluyendo la dependencia respecto al gradiente en

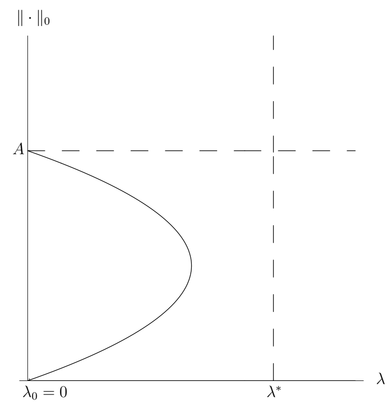

FIGURA 7

la matriz A. Como una primera aproximación a este problema general podemos considerar el operador *p-Laplaciano* que únicamente presenta dependencia respecto al gradiente, para después estudiar el caso de operadores generales. Para éste, son conocidos los resultados de bifurcación del Capítulo III y los de existencia de soluciones positivas del Capítulo V (véase [**6, 8, 9, 26, 40, 61, 67**]). También son conocidos los resultados de existencia de solución de las secciones IV.1 y IV.2 del Capítulo IV (véase [**6, 15, 28, 39**]). Respecto a los resultados de la sección IV.3, estudiamos el problema análogo para el *p-Laplaciano*, esto es, consideramos el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{rcll} -\Delta_p u \equiv -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) & = & f(x,u) + t\varphi_1^{p-1} & x \in \Omega, \\ u & = & 0 & x \in \partial\Omega, \end{array}\right\} \quad (Q_t)$$

donde $1 < p < \infty$, φ_1 es la función propia positiva normalizada asociada al primer valor propio de $-\Delta_p$ y $f(x,s)$ es una función de Carathéodory verificando que existen funciones positivas $c_1(x), c_2(x)$, $f'_{\pm\infty}(x) \in L^\infty(\Omega)$ tales que

$$|f(x,s)| \le c_1(x)|s|^{p-1} + c_2(x), \quad \text{a.e. } x \in \Omega, \ \forall\, s \in \mathbb{R}, \qquad (f_1)$$

$$\lim_{s\to\pm\infty} \frac{f(x,s)}{|s|^{p-2}s} = f'_{\pm\infty}(x), \quad \text{uniformemente en } x \in \Omega. \tag{f_2}$$

$$-\infty < f'_{-\infty}(x) < \lambda_1 < f'_{+\infty}(x) < \lambda_2. \tag{f_3}$$

Bajo estas condiciones será posible extender a este ambiente la prueba del Teorema 4.7. Concretamente probamos el siguiente

Teorema 5.19. *Supongamos que se satisfacen* (f_{1-3}) *y que* $f(x,\cdot)$ *es creciente a.e.* $x \in \Omega$. *Entonces existe* $t^* \in \mathbb{R}$ *tal que*

(1) (Q_t) *no tiene solución para cada* $t > t^*$,

(2) (Q_t) *tiene al menos una solución para* $t \leq t^*$,

(3) (Q_t) *tiene al menos dos soluciones para* $t << t^*$.

Más aún, en colabolación con el profesor Salvador Villegas, hemos conseguido dar incluso una prueba diferente, basada en técnicas variacionales, demostrando que para t suficientemente pequeño existe una solución de tipo mountain-pass y otra como un mínimo local del funcional de Euler asociado.

Respecto al resultado más general en que se prueba la existencia de al menos dos soluciones para cada $t < t^*$, Teorema 4.11, sigue siendo cierto para el *p-Laplaciano* en el caso de no-linealidades f verificando que $f(x,0) = 0$ a.e. $x \in \Omega$, debido a que en este caso es posible emplear el principio de comparación fuerte del tipo Hopf de [**70**]. Para extender este resultado al caso general necesitaríamos un principio de comparación fuerte que generalice los ya conocidos para el operador *p-Laplaciano* (véase [**97, 70**]).

Bibliografía.

[1] Ahmad, S., Lazer, A.C., Paul, J.: *Elementary critical point theory and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance.* Ind. Univ. Math. J. **25** (1976), 933-944.

[2] Amann, H.: *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in oredered Banach spaces.* SIAM Review **18** (1976), 620-709.

[3] Amann, H., Hess, P.: *A multiplicity result for a class of elliptic boundary value problems.* Proc. Roy. Soc Edinb. **84** (1979), 145-151.

[4] Ambrosetti, A.: *Critical Points and Nonlinear Variational Problems-Cours de la chaire Lagrange.* Mémoires de la société Mathématique de France. **49** 1992.

[5] Ambrosetti, A.: *Topics in critical points theory.* Variational Methods in Analysis and Mathematical Physics. I.C.T.P. 1981.

[6] Ambrosetti, A., Arcoya, D.: *On a Quasilinear Problem at Strong Resonance.* Topological Methods in Nonlinear Analysis. **6** (1995), 255-264.

[7] Ambrosetti, A., Brézis, H., Cerami, G.: *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems.* Journ. of Funct. Anal. **122** (2) (1994), 519-543.

[8] Ambrosetti, A., García Azorero, J., Peral, I.: *Multiplicity Results for Some Nonlinear Elliptic Equations.* Journ. of Funct. Anal. **137** (1) (1996), 219-242.

[9] Ambrosetti, A., García Azorero, J., Peral, I.: *Quasi-linear Equations With a Multiple Bifurcation.* Diff. Int. Eqn. **10** (1) (1997) 37-50.

[10] Ambrosetti, A., Hess, P.: *Positive solutions of Asymptotically Linear Elliptic Eigenvalue Problems.* Journ. of Math. Anal. and Appl. **73** (2) (1980), 411-422.

[11] Ambrosetti, A., Mancini, G.: *Theorems of Existence and Multiplicity for Nonlinear Elliptic Problems with Noninvertible Linear Part.* Ann. Scuola. nor. sup. Pisa **5** (1978), 15-38.

[12] Ambrosetti, A., Prodi, G.: *A Primer on Nonlinear Analysis*. Cambridge University Press 1993.

[13] Ambrosetti, A., Prodi, G.: *On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces*. Ann. Mat. Pura ed Appl. **93** (1972), 231-246.

[14] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P. H.: *Dual variational methods in critical point theory and applications*. Journal of Functional Analysis **14** (1973), 349-381.

[15] Anane, A., Gossez, J. P.: *Strongly nonlinear elliptic problems near resonance: a variational aproach*. Comm. Partial Diff. Equat. **15** (8) (1990), 1141-1159.

[16] Arcoya, D.: *Quasilinear elliptic equations with Neumann boundary condition via critical point theory*. International Conference on Differential Equations-Lisboa (1995), 247-252.

[17] Arcoya, D.: *Results for Asymmetric Nonlinear Boundary Value Problems*. Proceedings of the Second School: Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations. World Scientific. (1998), 1-35.

[18] Arcoya, D., Boccardo, L.: *Some remarks on critical point theory for nondifferentiable functionals*. NoDEA. **6** (1999), 79-100.

[19] Arcoya, D., Cañada, A.: *Critical point theorems and applications to nonlinear boundary value problems*. Nonl. Anal. T.M.A. **14** (1990), 393-411.

[20] Arcoya, D., Cañada, A.: *The dual variational principle and discontinuous elliptic problems with strong resonance at infinity*. Nonl. Anal. T.M.A. **15** (1990), 1145-1154.

[21] Arcoya, D., Carmona, J: *Problemas de Contorno Casi-Lineales de Tipo Elíptico*. Actas XVI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones. **1** (1999), 19-26.

[22] Arcoya, D., Carmona, J: *Quasilinear elliptic problems interacting with its asymptotic spectrum*. Preprint (1999).

[23] Arcoya, D., Carmona, J., Pellacci, B.: *Bifurcation for Quasilinear Operator*. Aparecerá en *Proc. Roy. Soc. Edinb.* **A.**

[24] Arcoya, D., Costa, D. G.: *Nontrivial solutions for a strongly resonant problem.* Differential and Integral Equations. **8** (1) (1995), 151-159.

[25] Arcoya, D., Díaz, J. I., Tello, L.: *S-Shaped Bifurcation Branch in a Quasilinear Multivalued Model Arising in Climatology.* J. Differential Equations. **150** (1) (1998), 215-225.

[26] Arcoya, D., Gámez, J.L.: *Bifurcation theory and related problems: Anti-Maximum Principle and Resonance.* Aparecerá en *Comm. P.D.E.*

[27] Arcoya, D., Gámez, J. L., Orsina, L., Peral, I: *Local existence results for sub-super-critical elliptic problems.* Aparecerá en *Comm. in Applied Anal.*

[28] Arcoya, D., Orsina, L.: *Landesman-Lazer Conditions and Quasilinear Elliptic Equations.* Nonlinear Analysis *T.M.A.* **28** (10) (1997), 1623-1632.

[29] Arcoya, D., Villegas, S.: *Dirichlet problems with asymmetric nonlinearities.* Comm. Appl. Nonlinear Anal. **4** (1) (1997), 81-90.

[30] Arcoya, D., Villegas, S.: *Nontrivial solutions for a Neumann problem with a nonlinear term asymptotically linear at $-\infty$ and superlinear at $+\infty$. Math.-Z.* **219** (4) (1995), 499–513.

[31] Arias, M., Campos, J.: *Exact number of solution of a one-dimensional Dirichlet problem with jumping nonlinearities.* Differential Equations Dynam. Systems. **5** (2) (1997), 139-161.

[32] Artola, M.: *Sur une classe de problèmes paraboliques quasi-lineares. Boll. U.M.I.* (6) **5** (B) (1986), 51-70.

[33] Artola, M., Boccardo, L.: *Positive solutions for some Quasi-linear Elliptic Equations.* Comm. in Appl. Nonlin. Anal. **3** (4), (1996), 89-98.

[34] Bartolo, P., Benci, V., Fortunato, D.: *Abstract Critical Point Theorems and Applications to Some Nonlinear Problems with Strong Resonance at Infinity.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications. **7** (9) (1983), 981-1012.

[35] Berestycki, H.: *Le nombre de solutions de certains problemés semilinéaires elliptiques.* J. Funct. Anal. **40** (1) (1981), 1-29

[36] Berger, M. S., Podolak, E.: *On the Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem.* Indiana *U. Math. J.* **24**, (1975), 837-846.

[37] Boccardo, L.: *Positive Eigenfunctions for a class of Quasi-linear Operators. Boll. Un. Mat. Ital.* **5** (B) (1981), 951-959.

[38] Boccardo, L., Dacorogna, B.: *Monotonicity of certain differential operators in divergence form.* Manuscripta Math. **64** (1989), 253-260.

[39] Boccardo, L., Drábek, P., Kučera, M: *Landesman-Lazer conditions for strongly nonlinear boundary value problems.* Comment. Math. Univ. Carolinae. **30** (3) (1989), 411-427.

[40] Boccardo, L., Escobedo, M., Peral, I.: *A Dirichlet problem involving critical exponents.* Nonlinear Analisys, Theory, Methods & Applications. **24** (11) (1995), 1639-1648.

[41] Brown, K. J., Ibrahim, M. M. A., Shivaji, R.: *S-shaped bifurcation curves.* Nonliner Anal. **5** (5) (1981), 475-486.

[42] Brézis, H., Kamin, S.: *Sublinear Elliptic Equations in* $\mathbb{R}^N$. Manuscripta Math. **74** (1992), 87-106.

[43] Brézis, H. Oswald, L.: *Remarks on Sublinear Elliptic Equations.* Nonlinear Anal. T.M.A. **10** (1) (1986), 55-64.

[44] Cañada, A.: *Introducción al análisis no lineal con aplicaciones a ecuaciones diferenciales e integrales.* Universidad de Granada. 1995.

[45] Cañada, A., Roca, F.: *Existence and multiplicity of solutions of some conservative pendulum-type equations with homogeneous Dirichlet conditions.* Diff. Int. Equations. **10** (1997), 1113-1122.

[46] Carmona, J.: *A class of strong resonant problems via Lyapunov-Schmidt reduction method.* Collection: Partial differential equations-Praha (1998), 89–98.

[47] Chabrowski, J.: *On the solvability of the Dirichlet Problem for nonlinear elliptic equations.* Journal D'analyse Mathematique. **50** (1988), 65-78.

[48] Chabrowski, J.:*Quasilinear ellipticity and the Dirichlet Problem.* Israel Journal of Math. **63** (3) (1988) 353-379.

[49] Chabrowski, J.: *Some Existence Theorems for the Dirichlet Problem for Quasilinear Elliptic Equations.* Annali di Matematica pura et applicata. **CLVIII** (IV) (1991), 391-398.

[50] Chang, K. C.: *Variational methods and sub- and super-solutions.* Scientia Sinica. Serie A. **36** (1983), 1256-1265.

[51] Costa, D. G., De Figueiredo, D. G., Srikanth, P. N.: *The exact number of solutions for a class of ordinary differential equations through Morse index computation.* *Journal Diff. Equat.* **96** (1992), 185-199.

[52] Dancer, E. N.: *Boundary-value problems for weakly nonlinear ordinary differential equations.* *Bull. Austral. Math. Soc.* **15** (1976), 321-328.

[53] De Figueiredo, D. G.: *On superlinear elliptic problems with nonlinearities interacting only with higher eigenvalues.* Rocky Mountain J. Math. **18** (2) (1.988), 287-303.

[54] De Figueiredo, D. G.: *Positive solutions of Semilinear Elliptic Problems.* Proc. of the first latin american school of differential equations, Lectures Notes 957, 1.982.

[55] De Figueiredo, D. G.: *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours.* Springer-Verlag, 1.989.

[56] De Figueiredo, D.G., Lions, P. L., Nussbaum, R. D.: *A priori estimates and existence of positive solutions for semi-linear elliptic equations.* Journal Math. *Pures et Appl.* **61** (1982), 41-63.

[57] De Figueiredo, D. G., Ruf, B.: *On a superlinear Sturm-Liouville equation and a related bouncing problem.* J. Reine Angew. Math. **421** (1991), 1-22.

[58] De Figueiredo, D. G., Solimini, S.: *A variational aproach to superlinear elliptic problems.* *Comm. PDE.* **9** (1984), 699-717.

[59] De Giorgi, E. : *Sulla Differenziabilità e l'Analiticità degli Estremali degli Integrali Multipli Regolari.* *Mem. Accad. Sci.* Torino (1957), 25-43.

[60] Deimling, K.: *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag 1985.

[61] Del Pino, M.A., Manásevich, R.: *Global bifurcation from the eigenvalues of the p-Laplacian.* J. Diff. Equations. **92** (1991), 226-251.

[62] Dolph, C.L.: *Nonlinear integral equations of the Hamerstein type.* Trans. Amer. *Math. Soc.* **66** (1949), 289-307.

[63] Domingos, A. R., Ramos, M.: *Remarks on a class of elliptic problems.* *Nonlinear Anal. T.M.A.* **25** (1995), 629-638.

[64] Fučik, S.: *Remarks on a result by A. Ambrosetti and G. Prodi.* *Boll. U.M.I.* **11** (1975), 259-267.

[65] Gallouet, T., Kavian, O.: *Résultats d'existence et de non existence de solutions pour certains problémes demi-linéaires á l'infini*. Ann. Fac. Sci. Toulouse. **3** (1981), 201-246.

[66] Gámez, J.L.: *Sub- and Super-solutions in bifurcation Problems*. Nonlinear Analysis, T.M.A. **28** (1997), 625-632.

[67] García Azorero, J., Peral, I.: *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a non-symmetric term*. Trans. Am. Math. Soc. **323** (1991), 877-898.

[68] Gidas, B., Spruck, J.: *A Priori Bounds for Positive solutions of Nonlinear Elliptic Equations*. Comm. in Partial Differential Equations, **6** (8) (1981), 883-901.

[69] Gilbarg, D., Trudinger, N.: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1983.

[70] Gueda, M., Veron, L.: *Quasilinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponent*. Nonlinear analysis, T.M.A. **13** (8) (1989), 879-902.

[71] Hammerstein, A.: *Nichtlinear Integralgleichungen nebst Anwendungen*. Acta Math. **54** (1930), 117-176.

[72] Hess, P.: *On a theorem by Landesman and Lazer*. Indiana Univ. Math. Journal. **23** (1974), 827-829.

[73] Kannan, R., Ortega, R.: *Existence of solution of $x'' + x + g(x) = p(t)$, $x(0) = 0 = x(\pi)$*. Proc. A.M.S. **96** (1986), 67-70.

[74] Kazdan, J., Warner, F.: *Remarks on Some Quasilinear Elliptic Equations*. Comm. Pure Appl. Math. **28** (367) (1975), 567-597.

[75] Krasnoselskii, M.: *On several new fixed point principles*. Sov. Math. Dokl. **14** (1973), 259-261.

[76] Krasnoselskii, M.: *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations*. Macmillan. New York 1964.

[77] Landesman, E., Lazer, A.: *Nonlinear Perturbations of Linear Elliptic Boundary Value Problems at Resonance*. J. Math. Mech. **19** (609) (1970), 609-623.

[78] Lazer, A., McKenna, P.: *Multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems with nonlinearities crossing several higher eigenvalues*. Jour. Rein. An. Math. **368** (1986), 184-200.

[79] Lazer, A., McKenna, P.: *On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear Dirichlet problem. Proc. Roy. Soc. Edinb.* **95** (A) (1983), 275-283.

[80] Lefton, L. E., Shapiro, V. L.: *Quasilinear Ellipticity and Jumping Nonlinearities. Rocky Mountain Journal of Mathematics* **22** (4) (1992), 1385-1403

[81] Leray, J. and Lions, J.L.: *Quelques Résultats de Višik sur le Problèmes Elliptiques Non Linéaires par les Méthodes de Minty-Browder. Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), 97-107.

[82] Leray, J. and Schauder, J.: *Topologie et équations fonctionelles. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **51** (1934), 45-78.

[83] Lions, P. L.: *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. SIAM Rev.* **24** (4) (1982), 441-467.

[84] Mawhin, J.: *Topological degree methods in nonlinear boundary value problems. CBMS Regional Conference Series Math.* **40**, A.M.S., Providence, R.I., 1977.

[85] Mawhin, J., Schmidt, K.: *Landesman-Lazer Type Problems at an Eigenvalue of Odd Multiplicity. Results in Mathematics* **14** (1988), 138-146.

[86] McKenna, P. J., Walter, W.: *On the multiplicity of the solution set of some nonlinear boundary value problems. Nonlinear Analysis, T.M.A.* **8** (8) (1984), 893-907.

[87] Mizogouchi, N., Suzuki, T: *Equations of gas combustion: S-shaped bifurcation and mushrooms. J. Differential Equations.* **134** (2) (1997), 183-215.

[88] Nussbaum. R.: *Uniqueness and Nonuniqueness for Periodics solutions of $x'(t) = -g(x(t-1))$. J. Differential Equations.* **34** (1979), 24-54.

[89] Orsina, L., Puel, J. P.: *Positive solutions for a class of nonlinear elliptic problems involving quasilinear and semilinear terms.* Preprint.

[90] *Proceedings of the Second School: Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations. World Scientific.* 1998.

[91] Peral, I.: *Métodos variacionales y ecuaciones en derivadas parciales. Almería.* (1998).

[92] Peral, I.: *Some Results on Quasilinear Elliptic Equations: Growth versus Shape. Proceedings of the Second School: Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations. World Scientific.* (1998), 153-202.

[93] Rabinowitz, P.H.: *Some Global Results for Nonlinear Eigenvalue Problems. J. Funct. Anal.* **7** (1971), 487-513.

[94] Ruf, B., Solimini, S.: *On a class of superlinear Sturm-Liouville problems with arbitrarily many solutions. SIAM.* **17** (1986), 157-163.

[95] Solimini, S.: *On the Solvability of Some Elliptic Partial Differential Equations with the Linear Part at Resonance.* Joural of Mathematical Analysis and *Applications.* **15** (1965), 189-258.

[96] Stampacchia, G.: *Le Problème de Dirichlet pour les Équations Elliptiques du Second Ordre À Coefficients Discontinus. Ann. Inst.* Fourier Grenoble. **117** (1965), 138-152.

[97] Vázquez, J. L.: *A Strong Maximum Principle for Some Quasilinear Elliptic Equations. Appl. Math. Optim.* **12** (1984), 191-202.

[98] Whyburn, G.T.: *Topological analysis.* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1958.

[99] Wiebers, H.: *S-Shaped Bifurcation Curves of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. Math. Ann.* **270** (1985), 255-270.