

Experimentación Numérica y Comparación de Integrales Difusas

Manuel Jorge Bolaños Carmona
Dpto. Ciencias de la Computación e I.A.
E.T.S. Informática
Universidad de Granada
e-mail: mjbc@robinson.ugr.es

Luis Daniel Hernández Molinero
Dpto. Informática y Sistemas
Facultad de Informática
Universidad de Murcia
e-mail: ldaniel@dif.um.es

Antonio Salmerón Cerdán
Dpto. Estadística y Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias Experimentales
Universidad de Almería
e-mail: asalmero@ualm.es

Resumen

Las integrales de Sugeno y de Choquet han sido ampliamente estudiadas en la literatura desde un punto de vista teórico. Sin embargo, del comportamiento de estos funcionales sólo se tiene una idea general. En este trabajo se reflejan los resultados de una comparación numérica que pretende servir como referencia en la mejor comprensión y utilización de ambas integrales.

Palabras claves: *integral de Choquet, integral de Sugeno, medida difusa*

1 Introducción

La integral difusa de Sugeno y la integral difusa de Choquet, como funcionales que permiten valorar una función acotada sobre una medida difusa, han sido estudiadas ampliamente en la literatura. En efecto, desde su definición en 1974, la integral de Sugeno (también llamada Fuzzy Expected Value FEV cuando se define sobre probabilidades) ha sido estudiada en diferentes contextos [8, 6], generalizada [11, 10, 5] o caracterizada [9, 4, 12] por numerosos autores. Así mismo, y a partir de la definición original de Choquet en 1953 [3] la esperanza monótona ME ha sido estudiada en el contexto de las medidas difusas [1, 7] como una generalización de la esperanza matemática habitual sobre medidas de probabilidad. También se dispone de estudios que comparan y relacionan los dos funcionales citados [2] (un exhaustivo número de trabajos puede encontrarse en la bibliografía de los citados).

Sin embargo, y a pesar de la abundancia de trabajos teóricos, del comportamiento de estos funcionales sólo se tiene una idea general que interpretaría la integral de Sugeno como una "mediana ponderada" y a la integral de Choquet como una "media deformada"; en la práctica, la comparación de ambos funcionales está aún limitada a la llamada cota de Sugeno para probabilidades, que fue generalizada por Bolaños, de

Campos y González para cualquier medida difusa [2]. En este trabajo se realiza una comparación numérica que sirva de referencia en la utilización de ambas integrales y en futuros desarrollos.

2 Definiciones y resultados conocidos

Sobre un conjunto finito $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, se define como medida difusa una función $g : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$ que verifique:

1. $g(\emptyset) = 0$
2. $g(X) = 1$
3. $A \subset B \Rightarrow g(A) \leq g(B) \quad A, B \in \mathcal{P}(X)$

Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{P}(X), g)$, se define la integral de Sugeno de una función $h : X \rightarrow [0, 1]$ como:

$$S(h) = \int h \circ g = \bigvee_{i=1}^n [a_i \wedge g(H_{a_i})]$$

donde H_a es el a -corte de h ($H_a = \{x \in X | h(x) \geq a\}$) y $a_i = h(x_i)$ para cada $x_i \in X$.

En las mismas condiciones, la integral de Choquet de h se define como:

$$C(h) = \int h \circ g = \int g(H_a) da = \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1})g(H_{a_i})$$

con $a_0 = 0$.

La relación entre ambos funcionales viene dada por la desigualdad [2]:

$$|S(h) - C(h)| \leq \frac{1}{4}$$

válida para todo g y para todo h .

¹ $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto de las partes de X

3 Experimentación

Para comparar y relacionar el valor de las dos integrales sobre diversas medidas difusas, se ha procedido de la siguiente forma:

1. Se considera un conjunto X con 10 elementos, $X = \{x_1, \dots, x_{10}\}$
2. Se define una medida difusa g fija.
3. Se genera aleatoriamente una muestra de 1000 funciones $h : X \rightarrow [0, 1]$ utilizando un generador congruencial lineal de números aleatorios.
4. Para cada función h se obtienen los valores de $S(h)$ y $C(h)$.
5. Se realiza un análisis comparativo y de correlación entre las 1000 parejas de valores obtenidas.

Este proceso se ha realizado para diversas medidas difusas:

1. Una medida de probabilidad uniforme ($g_1(x_i) = \frac{1}{10}$ para cada $x_i \in X$).
2. Una medida de probabilidad g_2 no uniforme (con dos valores 0.25, tres valores 0.10 y cinco valores 0.04).
3. Una medida difusa g_3 expansiva cercana a una probabilidad (las medidas de los conjuntos aumentan un 10 por ciento sobre las medidas del punto 1). Más detalladamente:
Sea g_1 la medida considerada en el experimento 1. Dada una función h , para cualquier a -corte de h , $H_a = \{x_{a_1}, \dots, x_{a_m}\}$, se calcula la medida $g_3(H_a)$ de la siguiente manera:

$$t = \sum_{i=1}^m g_1(x_{a_i}) + \left(\sum_{i=1}^m g_1(x_{a_i}) \right) \times \frac{1}{10}$$

$$g_3(H_a) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Puede comprobarse que $g_3(\phi) = 0$ y $g_3(X) = 1$.

4. Una medida difusa g_4 lejana a una probabilidad (las medidas de los conjuntos aumentan un 50 por ciento sobre las medidas del punto 1). Es decir:
Sea g_1 la medida considerada en el experimento 1. Dada una función h , para cualquier a -corte de h , $H_a = \{x_{a_1}, \dots, x_{a_m}\}$, se calcula la medida $g_4(H_a)$ de la siguiente manera:

$$t = \sum_{i=1}^m g_1(x_{a_i}) + \left(\sum_{i=1}^m g_1(x_{a_i}) \right) \times \frac{5}{10}$$

$$g_4(H_a) = \begin{cases} t & \text{si } t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

Puede comprobarse que $g_4(\phi) = 0$ y $g_4(X) = 1$.

5. Una medida difusa g_5 restrictiva cercana a una probabilidad (las medidas de los conjuntos disminuyen un 10 por ciento sobre las medidas del punto 1). Es decir:

Sea g_1 la medida considerada en el experimento 1. Dada cualquier función h , para cualquier a -corte de h , $H_a = \{x_{a_1}, \dots, x_{a_m}\}$, se calcula la medida $g_5(H_a)$ de la siguiente manera:

$$t = \sum_{i=1}^m g_1(x_{a_i}) - \left(\sum_{i=1}^m g_1(x_{a_i}) \right) \times \frac{1}{10}$$

$$g_5(H_a) = \begin{cases} 0 & \text{si } H_a = \phi \\ 1 & \text{si } H_a = X \\ t & \text{en otro caso} \end{cases}$$

6. Una medida difusa g_6 restrictiva lejana a una probabilidad (las medidas de los conjuntos disminuyen en un 50 por ciento sobre las medidas del punto 1). Es decir:

Sea g_1 la medida considerada en el experimento 1. Dada cualquier función h , para cualquier a -corte de h , $H_a = \{x_{a_1}, \dots, x_{a_m}\}$, se calcula la medida $g_6(H_a)$ de la siguiente manera:

$$t = \sum_{i=1}^m g_1(x_{a_i}) - \left(\sum_{i=1}^m g_1(x_{a_i}) \right) \times \frac{5}{10}$$

$$g_6(H_a) = \begin{cases} 0 & \text{si } H_a = \phi \\ 1 & \text{si } H_a = X \\ t & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Además se han considerado cuatro λ -medidas de Sugeno (g_7, g_8, g_9, g_{10}) dadas por la siguiente expresión genérica:

Dados $A, B \subset X$, $A \cap B = \phi$ y $\lambda > -1$,

$$g_\lambda(A \cup B) = g_\lambda(A) + g_\lambda(B) + \lambda g_\lambda(A)g_\lambda(B)$$

con $g_7(x_i) = g_8(x_i) = g_9(x_i) = g_{10}(x_i) = \frac{1}{10}$ para todo $x_i \in X$, y tomando $\lambda = -0.9$ para g_7 , $\lambda = -0.5$ para g_8 , $\lambda = 2$ para g_9 y $\lambda = 5$ para g_{10} .

4 Resultados

Para la primera medida (Tabla 1) se observa que ambas integrales proporcionan un promedio muy similar (diferencias no significativas) con mayor variabilidad de la integral de Choquet.

En cuanto a la segunda medida (Tabla 2), al igual que en el caso anterior, ambas integrales proporcionan un promedio muy similar con mayor variabilidad de la integral de Choquet.

Para la tercera medida (Tabla 3) el resultado muestra una media para la integral de Choquet significativamente superior ($p < 0.001$) a la correspondiente a la integral de Sugeno. Se mantiene una variabilidad ligeramente mayor en la integral de Choquet.

Respecto a la cuarta medida (Tabla 4) el resultado muestra una media para la integral de Choquet ampliamente superior ($p < 0.001$) a la correspondiente a la integral de Sugeno. Se mantiene una variabilidad ligeramente mayor en la integral de Choquet.

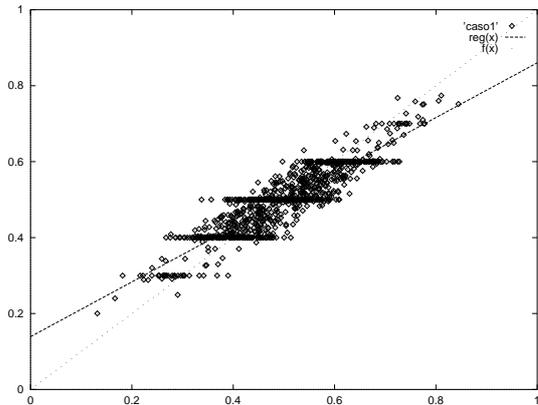


Figura 1: Integral de Sugeno (ordenadas) frente a la de Choquet (abscisas) para g_1

	Media	Desviación típica
S(h)	0.500099	0.087413
C(h)	0.500466	0.109700
C(h)-S(h)	0.000367	0.048079
Coef. de correl. C(h), S(h)	0.905369	
Regres.	b=0.721433	a=0.139047

Tabla 1: Resultados para la primera medida.

	Media	Desviación típica
S(h)	0.499102	0.113516
C(h)	0.497244	0.135915
C(h)-S(h)	-0.001858	0.057919
Coef. de correl. C(h), S(h)	0.907545	
Regres.	b=0.757980	a=0.122201

Tabla 2: Resultados para la segunda medida.

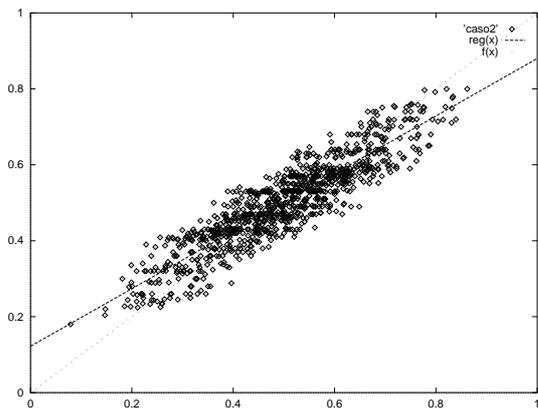


Figura 2: Integral de Sugeno (ordenadas) frente a la de Choquet (abscisas) para g_2

Con la quinta medida (Tabla 5) el resultado muestra una media para la integral de Sugeno significativamente superior ($p < 0.001$) a la correspondiente a la integral de Choquet. Se mantiene una variabilidad ligeramente mayor en la integral de Choquet.

Para la sexta medida (Tabla 6) se observa una media para la integral de Sugeno ampliamente superior ($p < 0.001$) a la correspondiente a la integral de Choquet, con variabilidad ligeramente mayor de la integral de Choquet.

Por lo que se refiere a las g_λ -medidas, de nuevo la integral de Sugeno aparece significativamente superior para las medidas restrictivas (g_7, g_8) y significativamente inferior para las expansivas (g_9, g_{10}), siempre con $p < 0.001$; llama la atención en estos casos que la variabilidad de la integral de Sugeno es ahora algo mayor y que los coeficientes de correlación son claramente menores, debido a una mayor concentración de los resultados.

Si se observan las rectas de regresión ajustadas en cada caso, aparece claramente reafirmada la menor sensibilidad de la integral de Sugeno y su mayor cercanía al valor medio teórico de las funciones, que es 0.50. En general, puede afirmarse que la integral de Choquet es más sensible a modificaciones en la medida con respecto a una referencia uniforme y también algo más sensible a los valores de la función que se integra; la integral de Sugeno actúa así como una me-

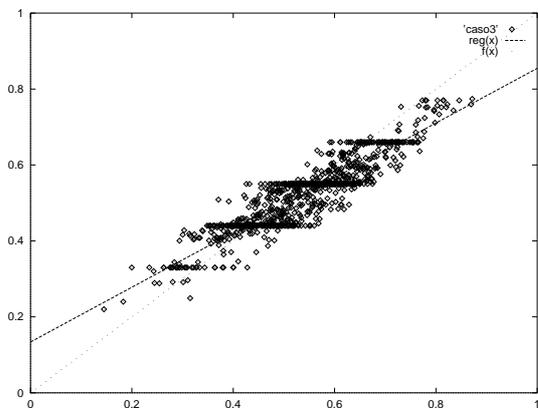


Figura 3: Integral de Sugeno (ordenadas) frente a la de Choquet (abscisas) para g_3

	Media	Desviación típica
S(h)	0.523650	0.091162
C(h)	0.540660	0.115091
C(h)-S(h)	0.017010	0.049599
Coef. de correl. C(h), S(h)	0.910052	
Regres.	b=0.720841	a=0.133920

Tabla 3: Resultados para la tercera medida.

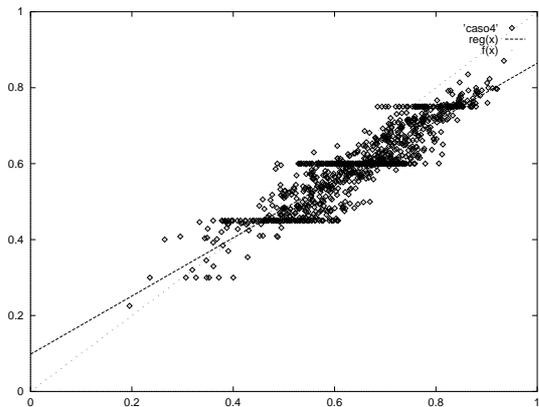


Figura 4: Integral de Sugeno (ordenadas) frente a la de Choquet (abcisas) para g_4

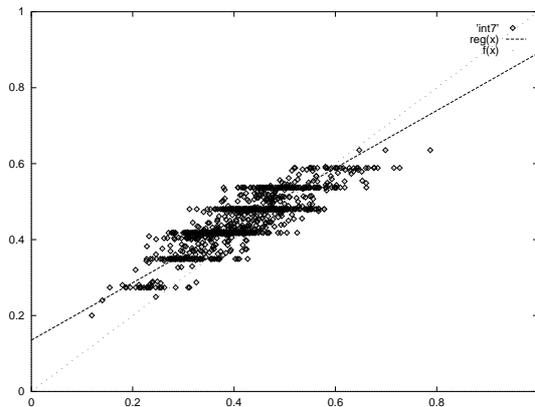


Figura 7: Integral de Sugeno (ordenadas) frente a la de Choquet (abcisas) para g_7

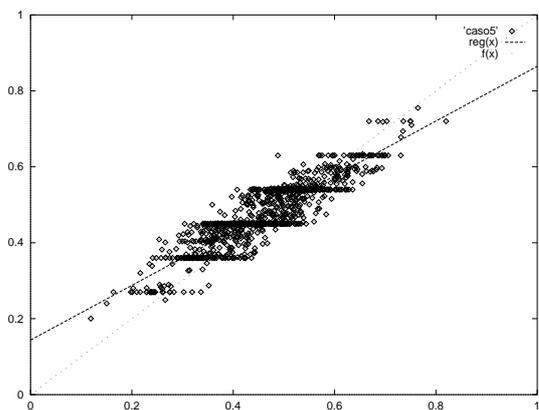


Figura 5: Integral de Sugeno (ordenadas) frente a la de Choquet (abcisas) para g_5

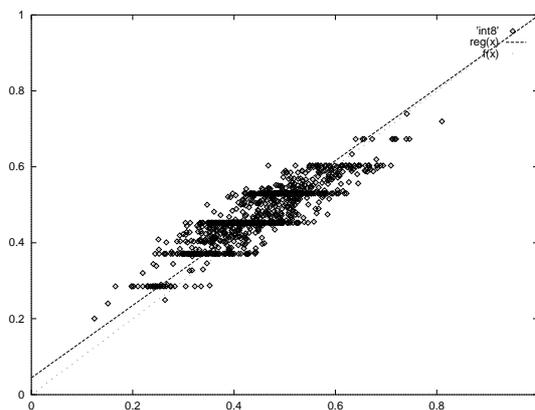


Figura 8: Integral de Sugeno (ordenadas) frente a la de Choquet (abcisas) para g_8

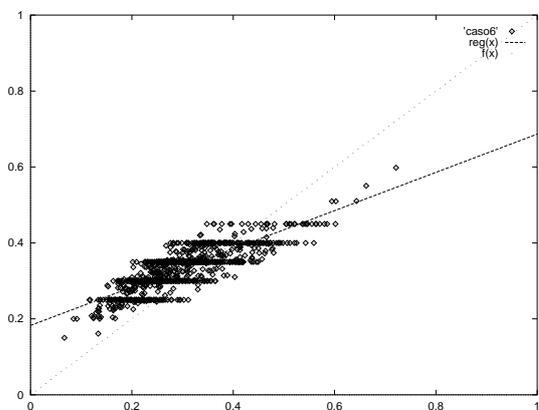


Figura 6: Integral de Sugeno (ordenadas) frente a la de Choquet (abcisas) para g_6

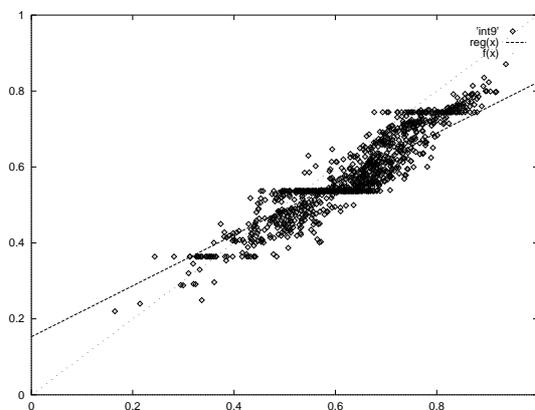


Figura 9: Integral de Sugeno (ordenadas) frente a la de Choquet (abcisas) para g_9

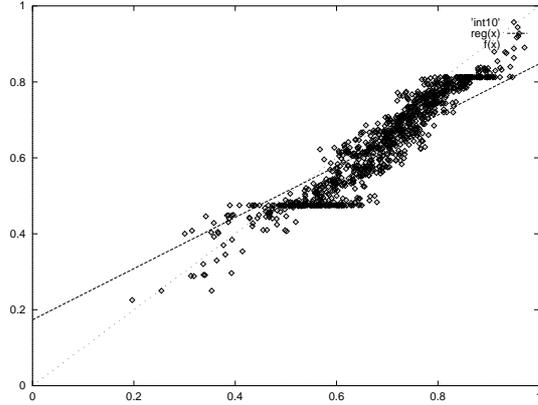


Figura 10: Integral de Sugeno (ordenadas) frente a la de Choquet (abscisas) para g_{10}

	Media	Desviación típica
S(h)	0.474461	0.102634
C(h)	0.451082	0.081674
C(h)-S(h)	-0.023380	0.047924
Coef. de correl. C(h), S(h)	0.758637	
Regres.	b=0.953327	a=0.044433

Tabla 8: Resultados para la octava medida.

	Media	Desviación típica
S(h)	0.593966	0.101550
C(h)	0.646925	0.120577
C(h)-S(h)	0.052959	0.050641
Coef. de correl. C(h), S(h)	0.910064	
Regres.	b=0.766457	a=0.098126

Tabla 4: Resultados para la cuarta medida.

	Media	Desviación típica
S(h)	0.575307	0.138837
C(h)	0.629780	0.123005
C(h)-S(h)	0.054473	0.047231
Coef. de correl. C(h), S(h)	0.594171	
Regres.	b=0.670650	a=0.152945

Tabla 9: Resultados para la novena medida.

	Media	Desviación típica
S(h)	0.475613	0.084324
C(h)	0.460272	0.104752
C(h)-S(h)	-0.015342	0.047521
Coef. de correl. C(h), S(h)	0.895794	
Regres.	b=0.721104	a=0.143710

Tabla 5: Resultados para la quinta medida.

	Media	Desviación típica
S(h)	0.333643	0.055272
C(h)	0.299494	0.090752
C(h)-S(h)	-0.034149	0.054687
Coef. de correl. C(h), S(h)	0.827370	
Regres.	b=0.503905	a=0.182726

Tabla 6: Resultados para la sexta medida.

	Media	Desviación típica
S(h)	0.638784	0.137876
C(h)	0.690128	0.139022
C(h)-S(h)	0.051344	0.041511
Coef. de correl. C(h), S(h)	0.679747	
Regres.	b=0.674144	a=0.173539

Tabla 10: Resultados para la décima medida.

	Media	Desviación típica
S(h)	0.450682	0.100068
C(h)	0.417336	0.077592
C(h)-S(h)	-0.033346	0.049804
Coef. de correl. C(h), S(h)	0.586093	
Regres.	b=0.755865	a=0.135233

Tabla 7: Resultados para la séptima medida.

dida basada en el orden, y por tanto más estable mientras que la integral de Choquet es similar a una media aritmética habitual y en consecuencia más sensible y variable (nótese que las diferencias con respecto al valor de 0.50 son muy superiores a las de la integral de Sugeno cuando la medida de probabilidad se "deforma").

5 Conclusiones

De los datos obtenidos se desprende que, reafirmando la forma de cálculo de ambas integrales, la integral de Choquet puede verse como una media ponderada, con la variabilidad y sensibilidad propias de este tipo de medidas, mientras que la integral de Sugeno se asemeja claramente a una generalización del concepto de mediana. Es recomendable, por tanto, la utilización de la integral de Sugeno cuando se pretenda medir el "tamaño" de la función, en el sentido de las coincidencias entre medidas y valores de la función, mientras que la de Choquet es más aconsejable si nos interesamos por la determinación de los valores medios en el sentido aritmético del término.

Por tanto, parece deducirse claramente de los resultados la complementariedad entre ambas definiciones, lo que permitirá la configuración de sistemas teóricos y aplicaciones prácticas bien diferenciadas.

Referencias

- [1] Bolaños, M.J, Lamata, M.T., Moral, S. Extensión de medidas difusas usando la esperanza monótona. *Stochastica* XI-2,3, pp.75-92, 1987.
- [2] Bolaños, M.J, de Campos, L.M., González, A. Convergence properties of the monotone expectation and its application to the extension of fuzzy measures. *Fuzzy Sets and Systems* 33, pp.201-213. 1989.
- [3] Choquet, G. Theory of capacities. *Ann. Ins. Fourier* (Grenoble) 5, pp.131-293. 1953/54.
- [4] De Cooman, G., Kerre, E.E. Possibility theory: an integral theoretic approach. *Fuzzy Sets and Systems* 46, pp.287-299. 1992
- [5] Friedman, M., Schneider, M., Kandel, A. The use of weighted fuzzy expected value (WFEV) in fuzzy expert systems. *Fuzzy Sets and Systems* 31, pp.37-45. 1989.
- [6] Kandel, A. Theory and applications of fuzzy statistics. *In Combining fuzzy imprecision with probabilistic uncertainty in decision making*, 89-112. Lecture notes in Econom. and Math. Systems, 1988.
- [7] Murofushi, T., Sugeno, M. An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral w.r.t. a fuzzy measure. *Fuzzy Sets and Systems* 29, pp.201-227. 1989.
- [8] Ralescu, D., Adams, G. The fuzzy integral. *J. Math. Anal. Appl.* 75, pp.562-570. 1980.
- [9] Squillante, M., Ventre, A. Representations of the fuzzy integral. *Fuzzy Sets and Systems* 29, pp.165-169. 1989.
- [10] Suarez, F., Gil, P. Two families of fuzzy integrals. *Fuzzy Sets and Systems* 18, 67-81. 1986.
- [11] Weber, S. Decomposable measures and integrals for Archimedean t-conorms. *J. Math. Anal. Appl.* 101, pp.114-138. 1984.
- [12] Zhang, W. Fuzzy contactability and fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems* 8, pp.81-92. 1982.