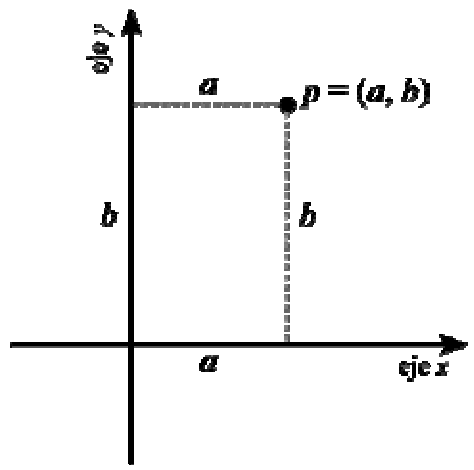
2. COORDENADAS CARTESIANAS O CÓMO DETERMINAR LA POSICIÓN DE UN PUNTO EN EL ESPACIO

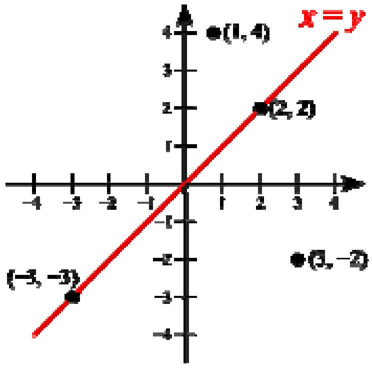
La parte central de la exposición IMAGINARY la constituyen representaciones de superficies algebraicas, realizadas fundamentalmente a través del programa SURFER. Dichas superficies vienen descritas por medio de una ecuación, o expresión algebraica, en términos de las coordenadas (x,y,z) en el espacio de dimensión tres. Por este motivo, la primera serie de actividades que se plantean en esta guía tiene como objetivo introducir a los y las estudiantes, o a la persona que lea esta guía, el concepto de coordenadas cartesianas y mostrarles algunos ejemplos sencillos de ecuaciones algebraicas.

Actividad 1: ¿Cómo se puede determinar la posición de un punto en el espacio? ¿Y en el plano? Estas preguntas pueden plantearse directamente a la clase e iniciar con ellas un debate (por grupos o toda la clase).

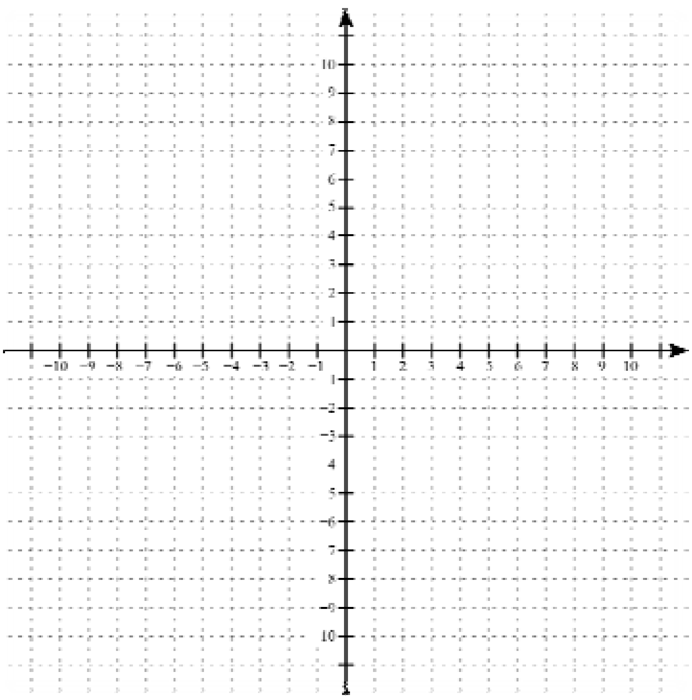
Para dar respuesta a las mismas, primero se debe abordar el caso más sencillo, las coordenadas cartesianas del plano. Puede tomarse como ejemplo una habitación vacía en la que se quiere determinar la posición de un punto en el suelo (ya sea porque es el lugar en el que se va a realizar un agujero, colocar una barra o tomarlo como referencia en la distribución). ¿Cómo puede fijarse la posición exacta de ese punto? Una posibilidad es medir las distancias del punto a dos paredes perpendiculares de la habitación. Así, mediante el conocimiento de dos números, es posible establecer la posición de un punto en el plano que forma el suelo. Eso es esencialmente un plano coordenado: un punto destacado, llamado *origen*, y dos rectas “perpendiculares” (horizontal y vertical), llamadas *ejes*, las cuales se cortan en el origen, de forma que cada par de números (x,y) nos determina el punto que está a una distancia x del eje vertical y a una distancia y del eje horizontal.



Este sistema de coordenadas permite además expresar conjuntos de puntos del plano que satisfacen una cierta propiedad. Por ejemplo, la expresión algebraica $x - y = 0$ representa la recta de los puntos $p = (x,y)$ tales que $x = y$ (como se muestra en la imagen).



A continuación se describen algunas actividades sobre el plano coordenado que pueden trabajarse con los y las estudiantes –o que puede realizar cualquier persona interesada en el tema–, y para las cuales únicamente se necesita una plantilla con los ejes coordenados (como la que se acompaña aquí).

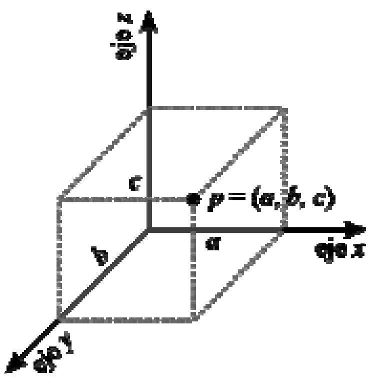


1.1. Situar sobre el plano coordenado los puntos de coordenadas $(1,7)$, $(3,4)$, $(-1,5)$, $(2,-6)$, $(-1,-2)$, etc. y al revés, fijados unos ciertos puntos sobre el plano determinar sus coordenadas.

1.2. Trabajar la representación gráfica, de nuevo sobre la plantilla, de los conjuntos de puntos con ecuaciones: i) $x+y=0$; ii) $x-y=0$; iii) $x^2-y^2=0$; iv) $y=x^2$; v) $x^2+y^2=1$; etc. y describir dichos conjuntos. Incluso se puede plantear, para discutir entre los y las estudiantes, cuál es el conjunto de los puntos $p=(x,y)$ tales que $x>y$.

1.3. Considerar el conjunto del plano descrito por la ecuación $x^2(1-x)-y^2=0$, que es una curva cuya imagen a priori se desconoce, y plantear si pertenecen a ella los puntos *(0, −2), (−3, 6), (−2, 4), (−1, −1), (3/4, −3/8)*, etc. Si se estima oportuno, puede hacerse esta actividad con otros conjuntos del plano expresados de forma algebraica.

Actividad 2: La siguiente cuestión de interés es cómo determinar la posición de un punto en el espacio de la habitación (puede de nuevo intentar justificarse mediante algún ejemplo real, como el lugar en el que va a ir colocado cierto punto de luz). La respuesta, análogamente, es con una terna de números (x,y,z) donde los dos primeros números se obtienen midiendo la distancia del punto a las dos paredes perpendiculares elegidas previamente y el tercer número corresponde a la altura desde el suelo. Así se introduce el espacio coordenado tridimensional: un punto que representa el *origen* y tres rectas "perpendiculares", llamadas *ejes*, que se cortan en dicho punto. De esta manera, cada terna (x,y,z) determina el único punto del espacio que está a una altura z y cuya sombra $(x,y,0)$ sobre el plano del suelo $z=0$ tiene coordenadas (x,y) (como muestra la imagen).



Se pueden plantear actividades similares a las anteriores, aunque con el problema de la representación y visualización del espacio tridimensional en un papel o en la pizarra (aunque hoy en día el ordenador puede ser una herramienta útil en este sentido):

colocar puntos en el espacio coordenado tridimensional, analizar y representar de ciertas expresiones algebraicas, etc. En particular, sería interesante que se trabajara la expresión algebraica que tiene un plano en el espacio (que es de la forma $ax + by + cz + d = 0$, donde *a, b, c, d* son números reales) y que se calcularan ejemplos de planos determinados por tres puntos cualesquiera (uno de ellos podría ser el plano que pasa por los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$).

Esta actividad puede hacerse más dinámica, animando a los y las estudiantes –o a quien pueda estar interesado en la misma– a convertir su clase, o una habitación cualquiera, en un espacio coordenado tridimensional sobre el que representar puntos o conjuntos dados por expresiones algebraicas. El trabajo directo sobre el aula motivará un mayor interés por el tema. Primero hay que elegir un rincón como origen de coordenadas y marcarlo con la letra O. Después, se deben nombrar los tres ejes perpendiculares que salen del rincón como ejes x, y, z (el eje x el que está a la izquierda en el suelo, el eje y a la derecha y el eje z el que sube hacia el techo), y pintar las medidas de los tres ejes (por ejemplo, una marca cada 10 cm). En ese contexto, puede trasladarse el estudio planteado anteriormente para el papel sobre la propia aula o habitación (determinar la posición de los puntos o representar conjuntos dados por expresiones algebraicas sencillas, como por ejemplo planos).

Actividad 3: Cuando se va a realizar un viaje en avión resulta que las compañías aéreas exigen que el equipaje de mano no exceda de un cierto tamaño. Pero ¿cuáles son las medidas posibles para esa maleta, o paquete, que se lleva dentro de la cabina del avión? Aunque pueda resultar extraño, la normativa de las compañías aéreas es "*una sola pieza de dimensiones, largo + ancho + alto, que no exceda de 115 cm*", lo cual no determina una medida fija sino todo un mundo de posibilidades. En este contexto se pueden trabajar algunas cuestiones.

3.1. Realizar una primera investigación práctica mediante la búsqueda de maletas, en casa o en tiendas de Internet, y la comprobación de si sus medidas se ajustan a la normativa de equipaje de mano. Incluso se pueden plantear algunos casos hipotéticos, como por ejemplo una caja de cartón con un árbol de navidad artificial, etc.

3.2. La siguiente actividad podría ser la búsqueda, por Internet, de las medidas recomendadas para las maletas del equipaje de mano para las diferentes compañías aéreas (Iberia: *55 × 40 × 20,* Air Europa: *55 × 35 × 25*, etc.), y el cálculo de la capacidad (volumen) de cada una de ellas (es interesante la realización de una tabla).

3.3. En vista del análisis anterior, se puede plantear a los estudiantes, como una investigación a desarrollar en grupos, el estudio de la capacidad máxima que podría alcanzarse en el equipaje de mano. Es importante que los y las estudiantes busquen su propia solución al problema, aunque no sea la más correcta, y a posteriori la persona responsable (profesor/a, monitor/a,...) puede comentar las soluciones y ofrecer la correcta si no la han conseguido.

Para resolver adecuadamente la cuestión, hay que acudir a la conocida desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, que para tres números es:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3},$$

cumpliéndose la igualdad si, y sólo si, $x = y = z$.

Por lo tanto, puede relacionarse el volumen de la maleta de largo x, ancho *y*, y alto *z*, que es igual a *xyz*, con la condición de las compañías aéreas sobre las dimensiones, *x + y + z* menor o igual que *115* cm, ya que

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{115}{3}\right)^3 \approx 38{,}3^3 = 56.328{,}7\ \mathrm{cm}^3.$$

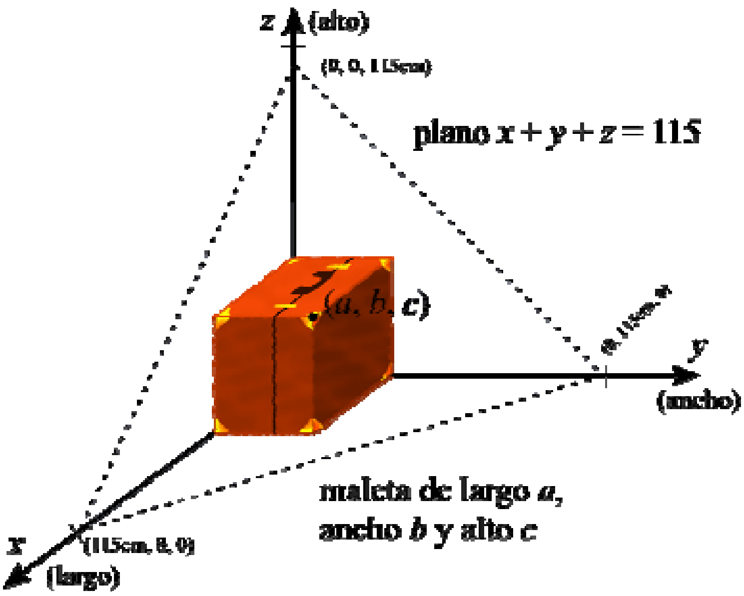
En conclusión, con una maleta cúbica de *38,3* cm. de lado obtendremos el máximo volumen.

Nota: en el transcurso de esta actividad puede plantearse la obtención de una demostración de la anterior desigualdad aritmético-geométrica, por ejemplo por el método de inducción. Una versión más sencilla consiste en demostrarla para dos números, es decir, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, y utilizar esta desigualdad para demostrar la correspondiente a tres números.

3.4. Antes, en los aeropuertos, había un contenedor metálico con forma de prisma rectangular en el que introducir la maleta para ver si podía aceptarse como equipaje de mano. Sin embargo, dicho artilugio no se ajustaba a la propia normativa de "*largo + ancho + alto que no exceda 115 cm*", ya que era rígido y no admitía diferentes dimensiones.

Una cuestión interesante, que relaciona la cuestión del equipaje con el espacio coordenado tridimensional, es la posibilidad de diseñar un sistema para que la compañía compruebe las medidas del equipaje de mano (sin tener que medirlas directamente).

Un posible método consiste en interpretar una maleta como un punto del espacio coordenado tridimensional. Dada una maleta de largo *x*, ancho *y*, y alto *z*, se coloca en el sistema coordenado tridimensional de forma que uno de sus vértices esté en el origen de coordenadas y tres de sus aristas estén apoyadas en los ejes (como se muestra en la imagen). De esta forma, el vértice opuesto al que está en el origen está marcando precisamente el punto de coordenadas (*x,y,z*).



Para intentar comprender la condición de las compañías aéreas, hay que plantearse qué conjunto de puntos (*x,y,z*) satisface la expresión algebraica $x+y+z=115$. Este conjunto es exactamente el plano que pasa por los puntos *(115, 0, 0)*, *(0, 115, 0)* y *(0, 0, 115).* Los puntos que están por debajo del plano satisfacen la desigualdad $x+y+z<115$ y los que están por encima la desigualdad contraria $x+y+z>115$. En conclusión, la compañía aérea necesitará una esquina que haga las veces de origen y ejes coordenados, una "plancha" plana y triangular (metálica o de plástico) cuyos vértices estén en los puntos *(115 cm, 0, 0)*, *(0, 115 cm, 0)* y *(0, 0, 115cm),* con una bisagra en el vértice superior para poderla abrir e introducir las maletas. Si es posible cerrar la plancha cuando colocamos una maleta en el rincón, entonces el punto (x, y, z) cuyas coordenadas determinan las dimensiones de la maleta está por debajo del plano de la plancha, es decir, $x+y+z<115$, y la maleta satisface la normativa. Lo contrario ocurre cuando no es posible cerrar la plancha.

Los y las estudiantes pueden construir su propio mecanismo en el aula, utilizando la esquina "coordenada" de la actividad 2, y con una cartulina para la plancha. Una vez construida pueden realizar una prueba práctica con algunas maleta.

Más información: Claudi Alsina, Contar bien para vivir mejor, Rubes, 2004.