Heurística de la Resolución de Problemas

Enrique de Amo Artero

Universidad de Almería
Olimpiadas de la RSME

Curso Académico 2014-15

Heurística de la resolución de problemas en Matemáticas:

Del libro de L.G. Larson (Solving problems through problems), quien se inspira en G. Polya, se pueden resumir en 12 las vías para abordar un problema en Matemáticas:

1. **Búsqueda de modelos**. Ejemplo: *Sea* (x_n) *una sucesión de números reales no nulos tales que satisfacen la relación*

$$x_{n+2} := \frac{x_n x_{n+1}}{2x_n - x_{n+1}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

   Establece condiciones necesarias y suficientes sobre x_1 *y* x_2 *para que* x_n *sea entero para una infinidad de valores de* n.

2. **Formula un problema equivalente**. Ejemplo: *Ecuentra las soluciones de la ecuación* $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.
3. **Modifica el problema**. Ejemplo: *Te vale el ejemplo anterior..., ¡ahora con otra forma de solucionarlo!*

4. **Dibuja una figura**. Ejemplo (*el problema del saludo*): *El matrimonio López Pérez ha organizado una fiesta en la que han sido invitados otros tres matrimonios. Al comienzo de la fiesta varios saludos tuvieron lugar (obviamente, nadie saludó a su pareja, ni lo hizo a sí mismo). Después de los saludos, López preguntó al resto (a su pareja incluida), cuántos saludos habían realizado. Para su sorpresa, cada cual dió una respuesta diferente. ¿Cuántas manos chocó Pérez?*
5. **Elige una notación eficaz**. Ejemplo: *Sea n un número natural tal que $2n + 1$ es un cuadrado perfecto. Prueba que $n + 1$ es la suma de dos cuadrados perfectos consecutivos.*
6. **Explota la simetría**. Ejemplo: *De todos los rectángulos inscritos en un círculo dado, ¿cuál será el de mayor área?*

7. **Divide el pronblema en casos**. Ejemplo: *Encuentra la expresión de todas las funciones f aditivas de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}$; es decir,* $f(x+y) = f(x) + f(y)$, con $x, y \in \mathbb{Q}$.
8. **Razona hacia atrás**. Ejemplo: *Sean a, b, c las longitudes de los lados de un triángulo. Prueba que*

$$3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 4(ab+bc+ca).$$

9. **Razona por reducción al absurdo**. Ejemplo: *Prueba que la serie $\sum_{n\geq 1} 1/n$ de los recíprocos de los naturales es divergente.*

10. **Busca paridad**. Ejemplo: *Sea n un natural impar, $n > 1$, y sea A una matriz simétrica de orden n tal que sus filas y columnas consisten en permutaciones del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Prueba que todos y cada uno de estos naturales ha de estar en la diagonal principal.*
11. **Considera los casos extremos**. Ejemplo: *Sea $n \in \mathbb{N}$. Prueba que el producto de n números naturales consecutivos es siempre múltiplo de $n!$.*
12. **Generaliza el problema**. Ejemplo: *Evalúa*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Contenidos a tratar:

- Números complejos:

$$i^2 = -1 > 0$$

- Series de números reales:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$$

- Resolución de ecuaciones:

$$F(x) = 0$$

- Principio del palomar:

$$\nexists f : \{1, 2, ..., m, m+1, ..., m+p\} \hookrightarrow \{1, 2, ..., m\}$$

(Estos contenidos serán de utilidad a la hora de profundizar en la Heurística anterior.)

Capítulo 1: Los números complejos

Lección 1: Conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}; \qquad \mathrm{i}^2 = -1 \\ e^{i\alpha} &= \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha \implies 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 0. \end{aligned}$$

Lección 2: Representaciones de los números complejos

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) = |z|\, e^{i \arg z} = |z|_{\arg z}$$

Lección 3: Operaciones con números complejos

$$\begin{aligned} z + w &= (\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w) + i\,(\operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w) \\ zw &= (\operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w) + i\,(\operatorname{Re} z \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} w) \end{aligned}$$

Lección 4: Raíces n-ésimas de la unidad

$$1 = z^n \implies z \in \left\{ e^{i\frac{1}{n}2\pi}, e^{i\frac{2}{n}2\pi}, e^{i\frac{3}{n}2\pi}, \ldots, e^{i\frac{(n-1)}{n}2\pi}, e^{i2\pi} \right\}$$

Capítulo 2: Series numéricas

Lección 5: Progresión geométrica de razón $z \in \mathbb{C}$

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Lección 6: Series geométricas: convergencia para $|z| < 1$ (pues entonces $|z|^n \to 0$):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

Lección 7: Otras series relacionadas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, z^n = \frac{1}{(1 - z)^2}, \qquad |z| < 1$$

Capítulo 3: Resolución de ecuaciones

Lección 8: Teorema de los ceros de Bolzano

$$f \in \mathcal{C}([a,b]) : f(a)\,f(b) < 0 \Longrightarrow \exists c \in \,]a,b[\, : f(c) = 0$$

Lección 9: Teorema de Rolle

$$f \in \mathcal{C}([a,b]) \cap \mathcal{D}(]a,b[) : f(a) = f(b) \Longrightarrow \exists c \in \,]a,b[\, : f'(c) = 0$$

Lección 10: Monotonía de funciones derivables sobre intervalos

Si f es derivable en $]a,b[$, entonces,

$$f'(x) > 0, \forall x \in \,]a,b[\, \Longleftrightarrow f \text{ es estrictamente creciente}$$

Capítulo 4: Principios Básicos

Lección 11: Principio del Palomar

$$\nexists f : \{1, 2, ..., m, m+1, ..., m+p\} \hookrightarrow \{1, 2, ..., m\}$$

Es decir, no existen aplicaciones inyectivas de conjuntos finitos en ninguno de sus subconjuntos propios.

Lección 12: Principio de inducción

$$A \subseteq \mathbb{N} : 1 \in A \text{ y } n+1 \in A \text{ si } n \in A \implies A = \mathbb{N}$$

(... como las fichas de dominó al caer...) y más general:

Si una proposición $P(n_0)$ es cierta para un $n_0 \in \mathbb{Z}$,
y $P(n+1)$ es cierta si $P(n)$ cierta para $n \geq n_0$, entonces
$P(n)$ es cierta para todo $n \geq n_0$, con $n \in \mathbb{Z}$

Gracias por vuestra atención, y suerte con las Olimpiadas!