# Preparación Fase Local Olimpiadas RSME, $6^a$ sesión

Enrique de Amo Artero
edeamo@ual.es

Almería, 25 de noviembre de 2016

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$, números naturales o enteros positivos
$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} (-\mathbb{N})$, números enteros
$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$, números racionales
$\mathbb{R} :=$ la recta real o conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = ]0, +\infty[$, semieje real positivo
$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} :=$ conjunto de los números irracionales; por ejemplo: $\pi, e, \sqrt{2}, \ldots$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

**Motivación**:

1. Encuentra funciones $f$ continuas (resp. discontinuas) en todo $\mathbb{R}$ tales que $[f(x)]^2 = 1$.

Las funciones constantemente $1$ o $-1$ son ejemplos de las primeras, mientras que la función

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

lo es de lo segundo.

2. Encuentra ejemplos de funciones $f$ y $g$ continuas en $\mathbb{R}$ (resp. en $[0,1]$) tales que $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$.

Podemos encontrar las trigonométricas $f \equiv \sin$ y $g \equiv \cos$ entre las primeras y $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = x$, entre las segundas.

"**Ecuación funcional**": $F(f, g, \ldots, x, y, \ldots, \alpha) = 0$

"**Solución general**" y "**solución particular**" de la ecuación funcional son importantes: la primera recoge "todas" las soluciones, un conjunto de funciones que satisfacen la ecuación dada; la segunda se refiere a cada una de ellas.

Los primeros cuatro ejemplos corresponden a las llamadas Ecuaciones de tipo Cauchy, que caracterizan a las llamadas **funciones elementales**: aplicaciones que respetan las operaciones entre los subconjuntos "apropiados" (los llamados grupo aditivo $(\mathbb{R}, +)$ y grupo multiplicativo $(\mathbb{R}^+, \cdot)$) de números reales cuando definimos aplicaciones entre ellos que respetan las operaciones ("homomorfismos"):

a. $f(x+y) = f(x) + f(y)$
b. $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$
c. $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$
d. $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

**1. Resuelve la ecuación funcional $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para $x$ e $y$ números racionales.**

– $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0) \implies 1 = 2$ si $f(0) \neq 0$, luego será $f(0) = 0$.

- $0 = f(0) = f(x-x) = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x)$ para todo $x$ en $\mathbb{Q}$.
- $n \in \mathbb{N} \implies f(n) = nf(1)$; lo probaremos haciendo uso del Principio de Inducción (véase Anexo I):

  a. $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$

  b. Supongamos la "hipótesis de inducción": $n \in \mathbb{N} \implies f(n) = nf(1)$

  Veamos que también se verifica para $n+1$:

  $f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$, luego cierto para todo $n$ en $\mathbb{N}$.
- $-n \in \mathbb{N} \implies f(-n) = (-n)f(1)$; luego la fórmula es cierta para todo $n$ en $\mathbb{Z}$.
- $n \in \mathbb{N} \implies f(1/n) = (1/n)f(1)$; lo probaríamos por inducción (como arriba, pero no entramos en detalles):

  $f(1) = f(n/n) = f\left(1/n + \overset{n}{\cdots} + 1/n\right) = nf(1/n)$.
- $p, q \in \mathbb{N} \implies f(q/p) = qf(1/p) = (q/p)f(1)$
- $-q, p \in \mathbb{N} \implies f((-q)/p) = (-q)f(1/p) = (-q/p)f(1)$

  En resumen:

  $$r \in \mathbb{Q} \implies f(r) = rf(1).$$
- Observamos que si $f(1) = 0$, $f \equiv 0$.

**2. Resuelve la ecuación funcional $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para $x$ e $y$ números racionales.**

- $f(0) = f(0+0) = [f(0)]^2 \implies f(0) \in \{0, 1\}$

  a. $f(0) = 0 \implies f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = 0 \implies f \equiv 0$; "trivializa" en la función nula.

  b. $f(0) = 1 \implies 1 = f(0) = f(x-x) = f(x+(-x)) = f(x)f(-x) \implies$

  $$f(-x) = [f(x)]^{-1} = 1/f(x)$$

  para todo racional $x$.
- Por inducción se puede probar que

  $$f(n) = [f(1)]^n$$

  para todo natural $n$.
- $f(0) = 1 = f(n-n) = f(n)f(-n) \implies f(-n) = 1/f(n) = [f(n)]^{-1}$, de donde

  $$f(p) = [f(1)]^p$$

  para todo número entero $p$. En efecto: $-n \in \mathbb{N}$, entonces: $f(-n) = [f(1)]^{-n}$.
- Finalmente: $r \in \mathbb{Q}, r = q/p$, y tendremos:

  a. $f(1/p) = [f(1)]^{1/p}$

b. $f(r) = f(q/p) = [f(1/p)]^q = \left[[f(1)]^{1/p}\right]^q = [f(1)]^r$.

En resumen:

$$f(r) = [f(1)]^r$$

para todo racional.

- Si $f(1) = e$, tendremos la exponencial de base $e$.
- ¿Puede ser $f(1) < 0$? Obsérvese que $f(1) = [f(1/2)]^2$.

**3. Resuelve la ecuación funcional** $f(xy) = f(x) + f(y)$ **para convenientes** $x$ **e** $y$ **números reales.**

- Obsérvese que $f(x) = \alpha \ln x$ satisface la ecuación para conveniente $\alpha$.
- En general, $f(x) = \alpha \log_a x$ con $\alpha = f(a)$.
- La función logaritmo (salvo constante multiplicativa $\alpha$) NO es la única extensión continua que admite $f$ a todo $\mathbb{R}^+$ y tampoco $\alpha \log|x|$ es la única extensión continua a $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Por ejemplo, $\alpha \mathrm{sgn}(x) \log|x|$ también lo es.
- La única extensión continua a todo $\mathbb{R}$, es $f \equiv 0$.

**4. Resuelve la ecuación funcional** $f(xy) = f(x) f(y)$ **para que siendo** $x$ **e** $y$ **números reales convenientes sea** $f$ **una función continua.**

- La función $f \equiv 0$ es siempre solución (continua) de esta ecuación, para cualquier dominio de definición.
- Obsérvese que $f(x) = x^\beta$ ($x > 0$) satisface la ecuación para conveniente $\beta$.
- Para todo $x \neq 0$: $f(x) = |x|^\beta$. También $f(x) = \mathrm{sgn}(x)|x|^\beta$ y $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$, son otras soluciones continuas en este caso.
- En el caso de toda la recta, son ejemplos de lo buscado: $f \equiv 0$, $f \equiv 1$, también $f(x) = |\mathrm{sgn}(x)|$ es solución. Aún un par más de soluciones:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ |x|^\beta, & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{y } f(x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \mathrm{sgn}(x)|x|^\beta, & x \neq 0 \end{cases}$$

- Un acceso directo al caso $\mathbb{R}^+$:
  * $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) f(1) = [f(1)]^2 \implies f(1) \in \{0, 1\}$. En concreto:
    $f(x) = f(x \cdot 1) = f(x) f(1) = 0$, luego o bien $f \equiv 0$ o es $f(1) = 1$
    $1 = f(1) = f(x/x) = f(x) f(1/x) \implies f(1/x) = 1/f(x)$. ("Nada" aportan estas tres líneas...)
  * $f(x^2) = [f(x)]^2 > 0$ (pues si fuese $f(a) = 0$ para algún $a$, trivializaría en la función nula: para cada $x$, $f(x) = f(ax/a) = f(a) f(x/a) = 0$).

    Aplicando logaritmos caemos en el caso anterior para la función $\ln f$.

**5. Comprueba que la función** $f(x) = -x^{\mathrm{sgn}(x)}$ **es una solución particular de la ecuación funcional** $f[f(x)] = 1/x$ **(**$x \neq 0$**).**

– Se resuelve sin más que considerar casos $x > 0$ y $x < 0$ y tener en cuenta que

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}$$

a. $x > 0 \implies f(x) = -x^{+1} = -x \implies f[f(x)] = f(-x) = -(-x)^{-1} = -1/-x = 1/x$

b. $x < 0 \iff -x > 0 \implies f(x) = -x^{-1} = -1/x > 0 \implies f[f(x)] = f(-1/x) = -(-1/x)^{+1} = 1/x$

**6. Sea $f$ una función que para cualesquiera números reales $x$ e $y$, satisface la relación $f(x+y)\,f(x-y) = [f(x)\,f(y)]^2$. Prueba que existe una función $g$ tal que para cada $x$ es $f(x) = g\left(x^2\right)$.**

– Comprobaremos que $f$ tiene simetría par: $f(-x) = f(x)$, de donde podremos razonar así:

$$f(x) = f\left(\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|^2}\right) = g\left(x^2\right), \text{ y } f(-x) = f\left(\operatorname{sgn}(-x)\sqrt{|-x|^2}\right) = g\left[(-x)^2\right],$$

luego $f(x) = g\left(x^2\right)$.

– $x = y = 0 \implies [f(0)]^2 = [f(0)]^4 \implies [f(0)]^2 = 1 \implies f(0) \in \{-1, 0, +1\}$

$f(0) = 0 \implies f \equiv 0$, pues $[f(x)]^2 = 0$ para todo $x$.

$f(0) = \pm 1, x = 0 \implies f(y)\,f(-y) = [(\pm 1)\cdot f(y)]^2 = [f(y)]^2 \implies f(-y) = f(y)$, luego par.

**7. Sean funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que satisfacen la relación $f[x + g(y)] = 2x + y + 5$. Calcula $g[x + f(y)]$.**

– Llamemos $\alpha := g(0)$. Así: $f(x + \alpha) = 2x + 5$.

– Un cambio de variable (traslación) nos da: $f(z) = 2(z - \alpha) + 5$.

– Pero entonces, yéndonos al enunciado: $f[x + g(y)] = 2(x + g(y) - \alpha) + 5 = 2x + y + 5$.

– De ahí: $2g(y) - 2\alpha = y$, o bien: $g(y) = y/2 + \alpha$.

– Y, por tanto, $g[x + f(y)] = [x + f(y)]/2 + \alpha = [x + 2(y - \alpha) + 5]/2 + \alpha = [x + 2y + 5]/2$,

es decir: $g[x + f(y)] = [x + 2y + 5]/2$.

**8. Prueba que la identidad es la única aplicación $f$ de los naturales en sí mismos que para cada natural $n$ verifica la relación**

$$f(n+1) > f[f(n)].$$

– Supongamos que $f$ es estrictamente creciente: $m < n \iff f(m) < f(n)$. De la propiedad de $f$, en el enunciado, la estricta monotonía conlleva que $f(n) < n + 1$. Pero, a su vez, también exige que $n \leq f(n)$, luego $f(n) = n$.

– Probemos ahora que $f$ ha de ser estrictamente creciente. Consiste en probar que:

* Comprobaremos que $f(1) < f(n)$ para todo $n$ natural $n > 1$:
  · como $f(n-1) \in \mathbb{N} \implies f(n-1) \geq 1$
  · por hipótesis: $f(n) = f[(n-1)+1] > f[f(n-1)]$, de modo que si fuese

$$f(1) \geq f(n) > f[f(n-1)],$$

  ese $n$ no sería el único cuya imagen por $f$ estaría por debajo de $f(1)$, y es evidente que este proceso se podría repetir de forma infinita, ahora para el natural $f(n-1)$, lo cual es absurdo (pues no hay infinitos naturales por debajo ningún natural dado). (Puedes consultar el Apéndice II, con el Principio de Buena Ordenación -PBO-, para comprender perfectamente lo que se está haciendo.) Por tanto, $f(1) < f(n)$.

* Comprobaríamos, análogamente, que $f(2) \leq f(n)$ para todo $n$ natural $n > 2$; y así, sucesivamente..., hasta que el Principio de Inducción se aplique convenientemente y concluya la prueba.

**9. Sea una función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfaciendo la ecuación funcional**

$$f(x) f(y) + f(\lambda/x) f(\lambda/y) = 2f(xy),$$

**donde $\lambda > 0$ y $f(\lambda) = 1$. ¿Quién ha de ser tal $f$?**

– Para $x = \lambda = 1 \implies 2[f(1)]^2 = 2f(1) \implies f(1) \in \{0,1\}$

  Si $f(1) = 0 \implies 1 = [f(\lambda)]^2 = 0$, absurdo. Luego es $f(1) = 1$.

– Con $y = 1 \implies f(x) f(1) + f(\lambda/x) f(\lambda/1) = 2f(x \cdot 1)$

  $\implies f(x) + f(\lambda/x) f(\lambda) = 2f(x) \implies f(x) = f(\lambda/x)$

– Sustituyendo en la ecuación: $2f(x) f(y) = 2f(xy)$, luego satisface la ecuación Tipo d. de Cauchy en $\mathbb{R}^+$. Luego

$$f(x) = x^{\beta}.$$

– Ahora bien, para $\lambda = 1$ será: $f(x) = f(1/x) \implies x^{\beta} = x^{-\beta} \implies \beta = 0 \implies f \equiv 1$.

**10. Resuelve explícitamente la función $f$ en esta ecuación, para $x$ en $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$:**

$$[f(x)]^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x.$$

– Hagamos el cambio de variable $t = \frac{1-x}{1+x}$:

$$\left[f\left(\frac{1-t}{1+t}\right)\right]^2 \cdot f(t) = 64\frac{1-t}{1+t},$$

  que es válido para $t$ en $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$.

– Pero es cómodo, por tanto, reescribir esta segunda ecuación como

$$\left[f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]^2 \cdot f(x) = 64\frac{1-x}{1+x},$$

  de modo que si hacemos el cociente del cuadrado de la primera ecuación entre la tercera, resulta:

$$[f(x)]^3 = \frac{64^2 x^2}{64\frac{1-x}{1+x}} = \frac{64x^2(1+x)}{1-x}.$$

– Despejando: $f(x) = 4\sqrt[3]{\frac{x^2(1+x)}{1-x}}$, para $x$ en $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

**11. Sea $f$ una aplicación inyectiva que verifica la relación $f[x+f(y)] = f[y+f(x)]$ para $x$ e $y$ reales arbitrarios.**

– Por inyectividad, de la ecuación funcional se deduce que $x+f(y) = y+f(x)$.

– Haciendo $y=0 \implies f(x) = x+k$, donde $k := f(0)$.

– La solución general será $f(x) = x+k$, para $k$ arbitrario.

**12. Sea la ecuación funcional dada por $f[x-f(y)] = f[f(y)] + xf(y) + f(x) - 1$ para $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.**

– Con $x = f(y) \implies f(0) = 2f[f(y)] + [f(y)]^2 - 1 \implies$

$$f[f(y)] = \frac{1-[f(y)]^2+f(0)}{2}.$$

– Con $x = f(z) \implies f[f(z)-f(y)] = f[f(y)] + f(z)f(y) + f[f(z)] - 1 \implies$ usando la expresión de arriba de $f[f(y)]$ :

$$f[f(z)-f(y)] = f(0) - \frac{[f(z)-f(y)]^2}{2}.$$

– Si $f(z)-f(y)$ pudiese tomar cualquier valor estaríamos ante la solución:

$$f(x) = f(0) - x^2/2.$$

– Probémoslo: de la eciación funcional $f[x-f(y)] = f[f(y)] + xf(y) + f(x) - 1$ podemos hacer

$$f[x-f(y)] - f(x) = f[f(y)] + xf(y) - 1$$

Podemos afirmar que existe algún $y$ tal que $f(y) \neq 0$, pues si no fuese así tendríamos $0=-1$. Y consideraremos, para $t \in \mathbb{R}$, el número real

$$x = \frac{t-1-f[f(y)]}{f(y)}.$$

– En estas circunstancias, tenemos

$$f\left[\frac{t-1-f[f(y)]}{f(y)} - f(y)\right] - f\left[\frac{t-1-f[f(y)]}{f(y)}\right] = t,$$

donde lo importante es que podemos afirmar que para cualquier $t \in \mathbb{R}$, tal número real se puede escribir como $t = f(u) - f(v)$ para $u$ y $v$ reales. Por tanto:

$$f(t) = f[f(u)-f(v)] = f(0) - \frac{[f(u)-f(v)]^2}{2} = f(0) - \frac{t^2}{2}.$$

– Calculemos ya $f(0)$ :

$$\begin{aligned} f(0)-\frac{x^2-2xf(y)+[f(y)]^2}{2} &= f[x-f(y)]=f[f(y)]+xf(y)+f(x)-1 \\ &= \frac{1-[f(y)]^2+f(0)}{2}+xf(y)+f(0)-x^2/2-1, \end{aligned}$$

reorganizando los cálculos:

$$f(0)=1,$$

de donde: $f(x)=1-x^2/2.$

**Ejercicios propuestos**

**1.** Prueba que la única función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ satisfaciendo la relación $f[2x-f(x)]=x$ y que deja algún punto fijo, es la identidad. ($\alpha$ es un *punto fijo de* $f$ sii $f(\alpha)=\alpha$.)

**2.** Encuentra la solución para la ecuación $f(xy)=xf(y)+yf(x)$, siendo $f:]1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$.

**3.** Encuentra $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ tal que $f(m+n)[f(m)-f(n)]=f(m-n)[f(m)+f(n)]$ con $f(1)=1$.

**4.** Comprueba que las únicas funciones $f$ que pueden satisfacer la relación

$$|f(y)-f(x)|\leq k|y-x|^2,$$

para $x$ e $y$ reales y $k>0$, son las constantes.

**5.** ¿Existe alguna función $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ tal que $f[f(n)]=n^2$ para cualquier natural $n$?

**6.** Encuentra todas las funciones $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tales que

$$f(y)-f(x)=(y-x)\frac{g(x)+g(y)}{2}.$$

**7.** Encuentra todas las funciones $f,g:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ tales que

$$f(y)-f(x)=(y-x)\,g\sqrt{xy}.$$

# 1 Anexo I: El Principio de Inducción

Un conjunto de número reales $A$ se dice "inductivo" sii contiene a la unidad ($1\in A$) y dado cualquier $x\in A$ se sigue que también $x+1\in A$. (A $x+1$ se le llama *siguiente* de $x$.)

(Nota: el papel que juega en este momento el 1 como elemento que ha de estar en el conjunto inductivo $A$ puede jugarlo cualquier otro número entero. Un algebrista elegirá el 0. Y es que lo esencial es que precisamos de un conjunto caracterizado por la propiedad de que si un elemento está en él, todos los "siguientes" también habrán de estarlo. Por ejemplo: $\mathbb{N}\cup\{-2,-1,0\}$ es inductivo.)

Observamos que $\mathbb{N}$ es un conjunto inductivo; de hecho es el conjunto inductivo más pequeño que existe. Eso es lo que dice el llamado

**Principio de Inducción** Si $A$ es un conjunto inductivo de números naturales, entonces

$A = \mathbb{N}$.

**Método de Demostración por Inducción** Para probar que en la familia de proposiciones $P(n)$ con $n$ natural son todas ellas ciertas, basta con probar que: (a) $P(1)$ es cierta, y (b) si $P(n)$ es cierta, entonces $P(n+1)$ también lo es.

**Demostración** (Que da lugar al propio método.) Sea el conjunto

$$A := \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es cierto}\}.$$

Bastará probar que $A = \mathbb{N}$, lo cual nos lo dará el Principio de Inducción cuando probemos (a) y (b):

(a) Si $P(1)$ es cierta, entonces $1 \in A$.

(b) Supongamos que $n \in A$. ¿Será también $n+1 \in A$? Como $n \in A$, tendremos que $P(n)$ es cierto; pero entonces (por "hipótesis de inducción"), tendremos que $P(n+1)$ es cierto. Y de ahí, $n+1 \in A$.

Por tanto, como $A$ es inductivo y está contenido en $\mathbb{N}$, la doble inclusión nos da $A = \mathbb{N}$. **Q.E.D.**

Comprender el Principio de Inducción no es complicado cuando lo visualizamos como la actividad consistente en lograr derribar un "listado infinito" (numerable: $1, 2, 3, ..., n, n+1, ...$) de fichas de dominó dispuestas en fila, de pie sobre su lado menor, y a una distancia suficiente como para que la caída de cada ficha conlleve la de la siguiente... ¿Qué has de hacer para que quede garantizado que derribas todas las fichas sin la necesidad de derribarlas una a una todas y cada una de ellas? ¡Sencillo! (1) Derribar la primera y (2) probar que cada vez que derribas una la que la sigue también cae.

# 2 Apéndice II: Principio de Buena Ordenación

Lo enunciamos sin demostración (puede atreverse el lector con una inteligente aplicación del Principio de Inducción; o bien pedírmela, por correo electrónico), en la versión que nos interesa:

**PBO:** "*Todo conjunto no vacío de números naturales tiene un mínimo.*"