Preparación de la Fase Final de las Olimpiadas de la RSME

Enrique de Amo Artero

Miscelánea de ejercicios

Universidad de Almería

9 de marzo de 2018

Sobre el binomio de Newton

Para cualesquiera nmeros reales a, b, x y natural n, se tienen:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

1. Calcula la suma $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
2. Calcula la suma $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.
3. Calcula la suma $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$.
4. Calcula la suma $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k} \binom{n}{k}$.
5. Calcula la suma $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Ejercicios varios

6. Dados n reales positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$ con suma igual a 1, prueba que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \geq \frac{1}{n}$. Averigua cuándo se da la igualdad.

7. (i) Desarrolla $(x+y+z)^3$ para cualesquiera reales x, y, z.
(ii) Demuestra que el número $1367631_{(n}$ es un cubo perfecto en cualquier base $n \geq 2$.

8. Encuentra un número *aabb* tal que sea un cuadrado perfecto.

9. Comprueba que todas las potencias naturales del número 12890625 acaban en 12890625.

10. De dos números naturales sabemos que suman 5264 y que su mínimo común múltiplo es 200340. Se quiere saber quiénes son tales números.

Más ejercicios variados

11. Prueba que los tres números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ no pueden estar en una misma progresión aritmética.

12. Comprueba que la suma infinita

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n + \cdots$$

supera a cualquier número real.

13. Comprueba que para tres reales positivos x, y, z con suma 1 se tiene que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \geq 64.$$

14. Comprueba que para dos reales positivos x, y con suma 1 se tiene que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Resolución de ecuaciones y alguno más

15. Resuelve en x la ecuación $\sqrt{a - \sqrt{x+a}} = x$.

16. Encuentra las raíces de la ecuación $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

17. Encuentra el número natural que tiene la forma $2^m \times 5^n$ sabiendo que la suma de todos sus divisores es 961.

18. Encuentra una función derivable f satisfaciendo, para x, y con $xy \neq 1$, la relación:

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

19. Comprueba que en cualquier fiesta siempre podremos encontrar a dos personas con el mismo número de amigos en dicha fiesta.

20. Encuentra una biyección entre los intervalos $[0, 1]$ y $[0, 1[$.