PREPARACIÓN OLIMPIADAS DE LA RSME
UNIVERSIDAD DE ALMERÍA
RELACIÓN PRIMERA DE EJERCICIOS
A RESOLVER MEDIANTE DIFERENTES ESTRATEGIAS

1. ¿Qué es cierto: $\pi^3 < 3^\pi$ o $3^\pi < \pi^3$?

2. Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a^3 + 2a^2 + 10a = 20$. Prueba que a y a^2 son dos números irracionales.

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que
$$a + b + c = 2, ab + bc + ca = -1, abc = 2.$$
Calcula el valor de las expresiones:
$$\text{a) } a^2 + b^2 + c^2, \text{ b) } a^3 + b^3 + c^3, \text{ c) } a^4 + b^4 + c^4.$$

4. Calcula $a, b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $ax^4 + bx^3 + 1$ sea divisible por $x^2 + 2x + 1$.

5. Calcula $a, b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $x^5 + ax^3 + b$ tenga una raíz real múltiple.

6. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se sabe que una de las raíces del polinomio x^3+ax^2+bx+c es la suma de las otras dos. Prueba que $a^3 - 4ab + 8c = 0$.

7. Tenemos 100 números en progresión aritmética tales que su suma es -1. Si la suma de los términos de subíndice par es 1, ¿cuánto vale la suma de los cuadrados de los cien números?

8. Prueba la siguiente relación entre las llamadas medias armónica, geométrica y aritmética:
$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}, \quad \forall x, y > 0.$$
Discute cuándo se alcanza la igualdad entre ellas. Aplica la conveniente relación entre las anteriores medias que te ayude a probar que:
$$a, b, c > 0 : (1 + a)(1 + b)(1 + c) = 8 \implies abc \leq 1.$$

9. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Prueba que
$$-1/2 \leq ab + bc + ca \leq 1.$$
¿Para qué valores de los tres parámetros se alcanzan las igualdades?

10. Sean $a, b, c > 0$. Prueba que
$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \geq 3/2.$$
Estudia en qué casos se tiene la igualdad.

11. Encuentra todos los naturales de cuatro cifras tales que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

12. Se te pide que des una fórmula explícita para la derivada n-ésima de la función
$$f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \left(1 - x^2\right)^{-1}.$$

13. Prueba que si tres puntos del plano z_1, z_2, z_3 son tales que
$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \text{ y } z_1 + z_2 + z_3 = 0,$$
entonces se trata de los tres vértices de un triángulo equilátero sobre la circunferencia unidad.

14. Encuentra una biyección del intervalo $]0, 1]$ en el intervalo $]0, 1[$.

15. Encuentra una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$.

16. Prueba que $\mathbb{R}$ no se puede escribir de la forma $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$. (Significa que no es numerable, que no se puede numerar.)

17. Prueba que la relación $n^5 - n = \dot{30}$ (múltiplo de 30) se verifica para cualquier número entero. (Indicación: $n(n+1) = \dot{2}$ y $n\left(n^2 + 2\right) = \dot{3}$.)

18. Prueba que, para cada natural n, se tiene la relación:
$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$
siendo estricta la primera desigualdad para $n \geq 2$.

19. Encuentra las cuatro raíces (complejas) de la ecuación
$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

20. Tenemos 50 fichas numeradas del 1 al 50. El objetivo es colorearlas, en rojo o en azul, en función de las siguientes reglas: la ficha número 5 es azul, y el resto obedecen a:

    - Si las fichas con números x e y son de distinto color, entonces la ficha número $|x - y|$ se pinta de color rojo.
    - Si las fichas con números x e y son de distinto color y el número $xy \in \{1, 2, 3, \ldots, 49, 50\}$, entonces la ficha número xy se pinta de color azul.

    Determina cuántas coloraciones distintas se pueden realizar en ese conjunto de fichas.

21. En la pared de un barranco hay 120 huecos dispuestos a ser ocupados por una bandada de 121 palomas. Razona que si todas deciden alojarse en ellos, al menos uno de dichos huecos será usado por más de una de las palomas.

22. Considera cinco puntos en el interior de un cuadrado de lado 1. Prueba que las distancias entre ellos, en al menos uno de los casos, es menor que $\sqrt{2}/2$.

23. Prueba que en cualquier reunión de n personas siempre han de existir, al menos, dos de ellas que hayan realizado el mismo número de saludos al inicio de la misma.

24. La familia López-Pérez ha organizado una fiesta en casa para otras tres parejas. Al llegar, como es natural, los asistentes se han saludado; pero, eso sí, siguiendo las normas de sentido común: ¡nadie ha saludado a su propia pareja, ni se ha saludado a sí mismo! Al acabar la fiesta, López preguntó a cada uno de los asistentes qué número de saludos había realizado; y oh, casualidad, ¡que resultó que ninguno de los preguntados había realizado el mismo número de saludos! ¿Podrías decir a qué número de personas saludó Pérez al comienzo de la fiesta?

25. Escogemos $n+1$ números distintos desde el 1 al $2n$. a) Prueba que siempre hay dos que son primos entre sí. b) Demuestra que siempre hay uno que es divisible por otro. ¿Son ciertas las afirmaciones anteriores si tomamos sólo n números en vez de $n+1$?

26. Prueba que la matriz cuadrada (y simétrica) de orden n dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene determinante igual a $n+1$.

27. ¿Cuándo se tiene que $n! - 3^n > 0$?

28. Prueba que toda función de puede descomponer de manera única como la suma de una función par y otra impar.

29. Prueba que el producto de cuatro naturales consecutivos nunca puede ser un cuadrado perfecto. (Idea: desarrolla y relaciona los productos $n\,(n+3)$ y $(n+1)\,(n+2)$.)

30. Prueba que si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n^3 - n = \dot{6}$ (múltiplo de 6).

31. Prueba que si $m, n, p \in \mathbb{N}$ son tales que $m+n+p=\dot{6}$, entonces $m^3+n^3+p^3=\dot{6}$.

32. Calcula el valor de la suma

$$7+77+777+\cdots+77\overset{n)}{\cdots}7$$

para cada valor del natural n.

33. Considera esta sucesión:

$$16, 1156, 111556, 11115556, \ldots$$

de modo que a partir del número 16 lo que hacemos, sucesivamente, es introducir un 15 en el centro de la nueva cifra. Prueba que todos estos números son cuadrados perfectos.

34. Prueba que el número $2014^{2013}-1013^{2013}-1001^{2013}$ es múltiplo de $2014^3-1013^3-1001^3$

35. Prueba la fórmula del binomio de Newton:

$$a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \qquad \Longrightarrow \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

36. Calcula las siguientes sumas con $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{a. } \textstyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k; \quad \text{b. } \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^2; \quad \text{c. } \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{1+k}.$$

37. Calculad el número de ceros en que termina el número $1000! = 1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$.

38. Ídem del ejercicio anterior para $2015! = 2015 \cdot 2014 \cdot 2013 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$.

39. Encuentra la expresión general de las funciones aditivas racionales de variable racional; es decir:

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \mid f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}.$$

40. Prueba que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f\left(x^2+y\right) = f(x) + y^2.$$

41. Encuentra todas las funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tales que

$$f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) = 3n$$

para cada natural n.

42. Encuentra todos los polinomios P de coeficientes reales tales que

$$P\left(P\left(x\right)\right)=\left[P\left(x\right)\right]^{2007}.$$

43. ¿Existe algún polinomio p para el que se verifique que

$$xp\left(x-1\right)=\left(x+1\right)p\left(x\right)$$

para cualquier valor del número real x?

44. Dado un número real s, considera el polinomio

$$p\left(x\right)=3x^{2}+3sx+s^{2}-1$$

del que supondremos que α y β son raíces suyas. Prueba que

$$p\left(\alpha^{3}\right)=p\left(\beta^{3}\right).$$

45. Halla todos los números naturales m y n tales que

$$n!+1=\left(m!-1\right)^{2}.$$

46. Sean $a,b,c\in\mathbb{R}\backslash\left\{0\right\}$ y distintos dos a dos. Si los polinomios $x^{2}+ax+bc$ y $x^{2}+bx+ac$ tienen una raíz común, entonces las otras dos raíces (una de cada uno) son las raíces del polinomio $x^{2}+cx+ab$.

47. Prueba que la serie $\sum_{n\geq1}1/n$ no tiene suma finita; es decir, la serie de la suma de los recíprocos de los naturales es divergente.

48. Prueba que la suma de los recíprocos de los naturales que en su representación decimal no contienen al dígito 9, es finita.

49. Calcula el límite

$$\lim\left(\frac{n}{n^{2}+1^{2}}+\frac{n}{n^{2}+2^{2}}+\frac{n}{n^{2}+3^{2}}+\cdots+\frac{n}{n^{2}+n^{2}}\right)$$

50. Calcula la suma

$$\frac{5}{5+25^{\frac{1}{2009}}}+\frac{5}{5+25^{\frac{2}{2009}}}+\frac{5}{5+25^{\frac{3}{2009}}}+\cdots+\frac{5}{5+25^{\frac{2008}{2009}}}$$

51. Del polinomio $p\left(x\right):=x^{3}-x+k$ se sabe que tiene tres raíces enteras distintas. ¿Quién puede ser k?

52. Sea $\lambda\in\mathbb{R}$. Se sabe de las soluciones de la ecuación

$$x^{3}+2\lambda x^{2}-\lambda x+10=0$$

que son reales y están en progresión aritmética. Hállalas.

53. Calcula las soluciones reales de la ecuación

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5.$$

54. Calcula $a \in \mathbb{R}$ tal que la suma de los cuadrados de las raíces del polinomio

$$p\left(x\right)=x^{3}-2ax^{2}+\left(a+1\right)x-a^{3}$$

sea mínima. Calcula dicha suma.

55. Prueba la desiguadad de Cauchy-Schwarz-Bunyakowski: para cualesquiera $2n$ números reales $a_1,\ldots,a_n,a_{b1},\ldots,b_n$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\right)^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(b_k\right)^2},$$

dándose la igualdad si y sólo si $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$.

56. Comprueba que la sucesión de término general $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es estrictamente creciente a través del estudio de la función $f\left(x\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, para $x>0$.

57. Dibuja la región R del plano dada por

$$R:=\left\{(x,y) \mid |x|-|y|\leq 1, |y|\leq 1\right\}$$

y calcula su área.

58. Prueba (usando el desarrollo de $\left(1+\mathrm{i}\right)^n$) que

$$\begin{aligned}\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4} &= \binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\cdots\\ \sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4} &= \binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\binom{n}{7}+\cdots\end{aligned}$$

59. Prueba que si $2n+1$ es un cuadrado perfecto, entonces $n+1=a^2+\left(1+a\right)^2$, para conveniente a.

60. Prueba que si a,b,c son las longitudes de los lados de cualquier triángulo, entonces

$$3\left(ab+bc+ca\right)\leq\left(a+b+c\right)^2\leq 4\left(ab+bc+ca\right).$$

61. Prueba que el producto de n números naturales consecutivos siempre es múltiplo de $n!$.

62. Prueba que para todo entero $n\geq 1$:

$$3+33+333+33\overset{n)}{\cdots}3=\frac{10^{n+1}-9n-10}{27}.$$

63. Prueba que de entre todos los rectángulos circunscritos en una circunferencia dada, el cuadrado es el de mayor área.

64. (Lewis Carroll) En una batalla una escuadra de 100 personas ha sufrido las bajas siguientes entre sus miembros: 85 de ellos han perdido una pierna, 80 la de un brazo, 75 han perdido un ojo y 70 la de una oreja. Un número indeterminado x de ellos ha perdido pierna, braxo, ojo y oreja. Prueba que $10 \leq x \leq 70$.