Proceso de simetrización y polinomios ortogonales truncados

Juan Carlos García Ardila

Universidad Politécnica de Madrid

En esta charla presentamos la familia de *polinomios de Laguerre truncados* $(P_n(x;z))_{n\geq 0}$, los cuales son ortogonales respecto al funcional lineal

$$\langle \boldsymbol{\ell}, p\rangle = \int_0^z p(x)x^\alpha e^{-x}dx, \quad z>0, \quad \alpha>-1.$$

Dicho funcional satisface la ecuación distribucional

$$D(x(x-z)\,\boldsymbol{\ell}) + (-x(z+2+\alpha-x)+z(1-\alpha))\,\boldsymbol{\ell} = 0.$$

Usando el proceso de simetrización, construimos los polinomios generalizados de Hermite truncados, los cuales son ortogonales respecto al funcional

$$\langle \mathbf{h}, p\rangle = \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} p(x)\,|x|^{2\alpha+1}e^{-x^2}dx.$$

Estos polinomios serán semiclásicos de clase 2 si $\alpha=-1/2$, y de clase 3, if $\alpha\neq -1/2$. Tomando en cuenta las propiedades de los polinomios de Laguerre truncados y su estrecha relación con los polinomios de Hermite truncados, las ecuaciones de Laguerre-Freud, los operadores de crecimiento y decrecimiento, así como las correspondientes ecuaciones diferenciales holonomicas que ellos satisfacen son deducidas.

Como aplicación, estudiamos la interpretación electrostática de los ceros de $(P_n(x;z))_{n\geq 0}$ y $(S_n(x;z))_{n\geq 0}$ así como el comportamiento de estos ceros en términos de la variable z.

Finalmente, proveemos una recurrencia de orden dos para los momentos de $\boldsymbol{\ell}$ y $\mathbf{h}$, respectivamente, también como las ecuaciones diferenciales de Painlevé respecto a la variable z que los coeficientes $\sigma_n(z)$ satisfacen, donde $b_n(z)=\sigma_{n+1}(z)-\sigma_n(z)$. Aquí $(b_n(z))_{n\geq 0}$ y $(a_n(z))_{n\geq 1}$ son los coeficientes de la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} &x\,P_n(x;z) = P_{n+1}(x;z) + b_n(z)\,P_n(x;z) + a_n(z)\,P_{n-1}(x;z), \quad n\geq 0,\\ &P_{-1}(x;z)=0, \quad P_0(x;z)=1.\end{aligned}$$

Trabajo conjunto con Diego Dominici (Research Institute for Symbolic Computation, Johannes Kepler University Linz) y Francisco Marcellán (Universidad Carlos III de Madrid).