2º Workshop "*Dos Días de Polinomios Ortogonales y Funciones Especiales*“

25º aniversario del grupo de investigación *Teoría de Aproximación y Polinomios Ortogonales*

21 y 22 de noviembre de 2019

Almería

Libro de resúmenes del congreso *2º Workshop "Dos Días de Polinomios Ortogonales y Funciones Especiales"* organizado el grupo de investigación Teoría de aproximación y polinomios ortogonales de la Universidad de Almería.

Web del congreso: `https://w3.ual.es/GruposInv/Tapo/CA2019/OPSF2019.html`

Índice general

Presentación del encuentro

El objetivo de este encuentro es celebrar el 25° aniversario de la creación del grupo de investigación “**Teoría de Aproximación y Polinomios Ortogonales**” FQM 229. Si bien el grupo se constituyó oficialmente en 1995 fue a finales de 1994 cuando se comenzó a gestar. En el período 1995-2015 estuvo constituido por miembros de la Universidades de Almería y Granada. A partir de 2015 los miembros de la Universidad de Granada crearon el grupo **GOYA** FQM-384.

El grupo ha tenido dos responsables: **Andrei Martínez Finkelshtein** desde su creación hasta julio de 2013 y **Juan José Moreno Balcázar** desde julio de 2013 hasta la actualidad.

El nombre del encuentro se ha tomado del celebrado en Granada en diciembre de 2018 y esperamos que sigan algunos más.

Así, la idea de este encuentro es celebrar en el estupendo entorno almeriense un aniversario importante para nuestro grupo con la participación de la comunidad *polinomiante* (en el sentido amplio de la expresión, no existente en la RAE) española, que es amplia y productiva.

Todas las ponencias serán de 25 minutos más 5 minutos de preguntas. Habrá una sesión de pósteres abierta a todos los inscritos.

¡Os esperamos en Almería en noviembre!

Comité organizador

Juan Francisco Mañas Mañas
Pedro Martínez González
Juan José Moreno Balcázar

Horario

Jueves 21 de noviembre

9:00–9:30	**Recogida de documentación**	
9:30–10:00	**Presentación del encuentro**	
10:00-10:30	**Francisco Marcellán** Universidad Carlos III de Madrid	Ortogonalidad, Propiedades electrostáticas de ceros de polinomios ortogonales y cuadratura Gaussiana
10:30-11:00	**Andrei Martínez** Baylor University y Universidad de Almería	Polinomios ortogonales, teorema de Poncelet, rango numérico, productos de Blaschke y más...
11:00-11:30	**María José Cantero** Universidad de Zaragoza	Transformación de Darboux: un nuevo enfoque para matrices CMV
11:30–12:00	**Desayuno/Póster**	
12:00-12:30	**Amparo Gil** Universidad de Cantabria	Métodos Computacionales para la Evaluación de Funciones de Distribución Acumulada
12:30-13:00	**Jose Luis López** Universidad Pública de Navarra	Asintótica de las integrales catastróficas
13:00-13:30	**Ester Pérez** Universidad de Zaragoza	Aproximaciones asintóticas de las catástrofes umbílicas
13:30-14:00	**Alicia Cachafeiro** Universidad de Vigo	Algunos resultados sobre interpolación de Lagrange basada en pesos analíticos sobre la circunferencia unidad
14:00–16:00	**Comida**	
17:00–20:00	**Excursión, Visita guiada a los Refugios de la Guerra Civil**	
21:00	**Cena del congreso**	

Viernes 22 de noviembre

09:30-10:00	**Jesús Sánchez–Dehesa** Universidad de Granada	Relaciones de Incertidumbre Entrópicas y Funciones de Bessel
10:00-10:30	**Antonio Durán** Universidad de Sevilla	Sobre las propiedades de los ceros positivos de series de Bessel
10:30-11:00	**Renato Álvarez** Universidad de Sevilla	Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones especiales en la física-matemática
11:00-11:30	**Ramón Orive** Universidad de La Laguna	Problemas de equilibrio para potenciales de Riesz en el eje real
11:30–12:00	**Desayuno/Póster**	
12:00-12:30	**Héctor Pijeira** Universidad Carlos III de Madrid	Aproximación Racional y Ortogonalidad tipo Sobolev
12:30-13:00	**Guillermo López** Universidad Carlos III de Madrid	Aproximación Hermite-Padé multinivel a un sistema de funciones meromorfas
13:00-13:30	**Óscar Ciaurri** Universidad de La Rioja	Análisis armónico discreto, polinomios ortogonales y funciones especiales
13:30-14:00	**Gracia Castro** Universidad de Almería e INVISION	Modelo de reconstrucción topográfica de la superficie anterior de la córnea humana
14:00–16:00	**Comida**	
16:00-16:30	**Miguel A. Piñar** Universidad de Granada	Sobre h-armónicos
16:30-17:00	**Iván Area** Universidad de Vigo	Polinomios mónicos de Racah en dos variables
17:00-17:30	**Juan Luis Varona** Universidad de La Rioja	Desarrollo en fracción continua de ciertas series de Engel y Pierce que dan lugar a números transcendentes
17:30–18:00	**Café/Póster**	
18:00-18:30	**Manuel Mañas** Universidad Complutense de Madrid	Aplicaciones del problema de Riemann–Hilbert para polinomios matriciales ortogonales
18:30-19:00	**David Gómez–Ullate** Universidad de Cádiz	Soluciones racionales de Painlevé PIV y sus generalizaciones de orden superior
19:00	**Clausura**	

Resúmenes de las ponencias

Título: Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones especiales en la física-matemática

Ponente: Renato Álvarez, Universidad de Sevilla

Las funciones especiales, tal y como afirma Alberto Grünbaum (del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Berkeley): "Las funciones especiales son para las matemáticas lo que las tuberías son para una casa: nadie quiere exhibirlas abiertamente, pero nada funciona sin ellas". La idea de esta charla es mostrar con algunos ejemplos de la física-matemática esta afirmación mostrando algunos resultados de los últimos años en distintas áreas de la física matemática que van desde la mecánica cuántica no relativista, hasta la ecuación no lineal de Dirac.

Título: Polinomios mónicos de Racah en dos variables

Ponente: Iván Area, Universidad de Vigo

En esta charla se presentará una fórmula explícita para los polinomios de Racah mónicos en dos variables, solución de una ecuación de cuarto orden en diferencias-divididas de tipo hipergeométrico. Mediante relaciones límite se obtendrán las correspondiente fórmulas explícitas para otras familias de polinomios mónicos en dos variables.

<u>Título:</u> Algunos resultados sobre interpolación de Lagrange basada en pesos analíticos sobre la circunferencia unidad

<u>Ponente:</u> Alicia Cachafeiro, Universidad de Vigo

En esta charla se presenta el problema de interpolación de Lagrange sobre la circunferencia unidad utilizando sistemas nodales formados por las raíces de los polinomios para-ortogonales con respecto a pesos analíticos. Los resultados que se presentan abordan cuestiones de convergencia en el caso de funciones continuas con un módulo de continuidad apropiado, así como la velocidad de convergencia para funciones suaves. En el caso de las funciones continuas a trozos se presenta un estudio detallado del fenómeno de Gibbs-Wilbraham, describiendo el comportamiento oscilatorio de los polinomios de interpolación en las proximidades de los puntos de discontinuidad. Finalmente se indican algunos experimentos numéricos para visualizar gráficamente los resultados obtenidos.

<u>Título:</u> Transformación de Darboux: un nuevo enfoque para matrices CMV

<u>Ponente:</u> María José Cantero, Universidad de Zaragoza

Trabajo conjunto con L. Moral, L. Velázquez.

La transformación de Darboux puede entenderse como el resultado de factorizar un operador autoadjunto como producto de otros dos, cuya permutación proporciona un nuevo operador autoadjunto. Dicha transformación, que inicialmente se presenta como una poderosa herramienta en el campo de los sistemas integrables, posee también aplicaciones en diversas áreas de las matemáticas y de la física.

Cuando se aplica esta transformación a matrices de Jacobi, representantes canónicos de los operadores autoadjuntos, la transformación de Darboux es equivalente a una modificación de Christoffel de la correspondiente medida de ortogonalidad, que la multiplica por un polinomio de grado uno. La transformación inversa de Darboux corresponde a la denominada transformación de Geronimus, que divide la medida por un polinomio de grado uno y añade un posible punto de masa en el cero del polinomio.

En el caso unitario, la transformación de Darboux de los correspondientes representantes canónicos, las matrices CMV, requiere una modificación previa de estas matrices unitarias mediante un polinomio de Laurent, con objeto de transformarlas en autoadjuntas. La transformación de Darboux generada de esta forma es también equivalente a una modificación de Christoffel de la medida. En el correspondiente problema inverso surgen algunos inconvenientes.

En esta charla expondremos la transformación de Darboux para matrices CMV resaltando tales inconvenientes, en particular, la presencia de soluciones espurias asociadas a productos de Sobolev. Mostraremos como este inconveniente desaparece al introducir una nueva versión de la transformación de Darboux para CMV que, en lugar de actuar sobre la propia matriz CMV, lo hace sobre los dos factores tridiagonales en los que una CMV factoriza de forma natural.

Título: **Modelo de reconstrucción topográfica de la superficie anterior de la córnea humana**

Ponente: **Gracia Castro de Luna**, Universidad de Almería e INVISION

La reconstrucción de la superficie anterior de la córnea en el ojo humano ha cobrado mucho interés con el auge de la cirugía refractiva láser corneal que mayoritariamente actúa a este nivel ocular. Es preciso que la reproducción que obtengamos de esta superficie tenga el máximo poder de resolución de todo tipo de irregularidades debido a varios motivos:

1. Es necesario el diagnóstico subclínico de una patología corneal, el queratocono, que contraindica la cirugía refractiva corneal al provocar un adelgazamiento progresivo de la córnea con un incremento de su astigmatismo irregular. El queratocono es fácilmente diagnosticable a través de una topografía corneal en estadíos evolucionados de la enfermedad pero no sucede así en los estadíos subclínicos en los que los índices topográficos prácticamente no se alteran.

2. El mapa altimétrico y aberrométrico obtenido de la topografía corneal es utilizado como guía para los tratamientos refractivos customizados a pacientes con irregularidades corneales primarias o secundarias a algún tratamiento corneal anterior.

Hoy día la mayoría de los topógrafos que existen en el mercado utilizan datos altimétricos de un número de puntos limitados tomados en círculos concéntricos (Discos de Plácido) y los polinomios de Zernike son el referente matemático de reconstrucción de la topografía corneal del paciente. A partir de ellos se calculan los coeficientes aberrométricos de bajo y alto orden. Este cálculo se emplea para hacer cirugías de ablación láser de la superficie corneal guiadas por topografías. Sin embargo aproximándonos a las condiciones de utilización de dichos polinomios se deben cumplir una serie de condiciones que habitualmente no se dan en la córnea humana como:

- Precisan ortogonalidad (no conseguida con datos discretos, hay que recurrir a métodos de ortogonalización de Gram-Schmidt).

- Precisan pupilas absolutamente circulares.

- No detectan algunas irregularidades.

En nuestra charla trataremos de aplicaciones de otros tipos de polinomios y su fortaleza en una mejor reconstrucción corneal que ha supuesto un proyecto de investigación conjunto con el departamento de Matemáticas de la Universidad de Almería y el desarrollo de un software propio de reconstrucción con unos índices de irregularidad corneal útiles en el diagnóstico del queratocono subclínico.

Título: Análisis armónico discreto, polinomios ortogonales y funciones especiales

Ponente: Óscar Ciaurri, Universidad de La Rioja

Trabajo conjunto con A. Arenas y E. Labarga.

Consideremos el operador

$$\Delta_d u(n) = u(n-1) - 2u(n) + u(n+1), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

que denominamos laplaciano discreto. Es conocido que el semigrupo del calor asociado con él está dado en términos de la función de Bessel modificada I_ν. La existencia de dicho semigrupo permite definir algunos de los operadores clásicos del análisis armónico en este contexto y estudiar sus propiedades de acotación en espacios de tipo $\ell^p(\mathbb{Z})$. En esta charla veremos como podemos considerar otros laplacianos discretos relacionados con algunas familias de polinomios ortogonales y como definir en este contexto operadores como la transformada de Riesz o las g_k-funciones.

Título: Sobre las propiedades de los ceros positivos de series de Bessel

Ponente: Antonio Durán, Universidad de Sevilla

Dada una sucesión de números reales $\mathfrak{a} = (a_m)_{m\geq 1}$, definimos la función

$$U^{\mathfrak{a}}_{\mu,\nu}(x) = \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{x^\mu} \sum_{m\geq 1} \frac{a_m}{j^\mu_{m,\nu}} J_\mu(j_{m,\nu}x), \qquad x \in (0, +\infty),$$

donde J_ν denota la función de Bessel de orden ν, $j_{m,\nu}$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, son sus ceros positivos y $\mu, \nu > -1$.

En una investigación en curso con Ó. Ciaurri, M. Pérez y J.L. Varona hemos empezado a estudiar posibles regularidades de los ceros positivos de las funciones $U^{\mathfrak{a}}_{\mu,\nu}$. En la charla propondemos alguna conjetura sobre ellos, junto con un teorema.

Título: Métodos Computacionales para la Evaluación de Funciones de Distribución Acumulada

Ponente: Amparo Gil, Universidad de Cantabria

Algunas funciones especiales son de particular importancia en las áreas de Probabilidad Aplicada y Estadística. Por ejemplo, las funciones gamma y beta incompletas son (salvo factores de normalización) las funciones de distribución acumulada gamma y beta central, respectivamente. Las correspondientes distribuciones no centrales (la función Q de Marcum y la distribución beta no central) son también de importancia porque aparecen implicadas en un buen número de aplicaciones. Por otra parte, no sólo el cálculo directo de las funciones de distribución sino también su inversión es de interés para el cálculo de percentiles o la determinación de valores de algunos parámetros relevantes cuando la función de distribución está implicada en contraste de hipótesis.

En esta charla, presentaré resultados recientes que hemos obtenido vinculados al cálculo e inversión de la función de distribución beta. En particular, discutiré métodos para el cálculo e inversión de la función beta no central y las funciones de distribución binomial estándar y binomial negativa. Utilizaremos ejemplos numéricos para ilustrar los métodos de cálculo. Como veremos, estas funciones de distribución pueden considerarse como una rama, quizás no tan bien conocida como otras, de la gran familia de funciones especiales.

Referencias

On the computation and inversion of the cumulative noncentral beta distribution. A. Gil, J. Segura, N. M. Temme. *Appl. Math. Comput.* **361** (2019) 74-86.

Asymptotic inversion of the binomial and negative binomial cumulative distribution functions. A. Gil, J. Segura, N.M. Temme. Enviado para publicación.

Título: **Soluciones racionales de Painlevé PIV y sus generalizaciones de orden superior**

Ponente: **David Gómez–Ullate, Universidad de Cádiz**

Trabajo conjunto con P. Clarkson, Y. Grandati and R. Milson.

Expondremos un método sistemático para construir soluciones racionales de PIV y sus generalizaciones de orden superior, conocidas como A_{2n}-Painlevé, basado en la teoría de cadenas de revestimiento (dressing chains). Todas las soluciones se expresan a través de determinantes Wronskianos cuyas entradas son secuencias de polinomios de Hermite. Dichas secuencias están relacionadas con diagramas de Maya cíclicos, cuya caracterización será expuesta en el trabajo. Por otro lado, demostramos que la construcción anterior abarca todas las posibles soluciones racionales, alcanzando por tanto una clasificacion completa. Este resultado está basado en un análisis detallado de las condiciones de monodromía en los polos de dichas soluciones, empleando técnicas clásicas desarrolladas por Veselov, Oblomkov y Duistermaat-Grünbaum. Los polos de estas soluciones en el plano complejo forman patrones de gran regularidad y cierta belleza. Terminaremos formulando la conjetura de que todas las soluciones racionales de PV y sus generalizaciones A_{2n+1}-Painlevé se expresan como Wronskianos de polinomios de Laguerre. Vemos por tanto que los polinomios clásicos son más que una forma conveniente de expresar soluciones racionales de las ecuaciones de Painlevé PIV y PV (y sus generalizaciones de orden superior), sino que ambos están esencialmente conectados.

Referencia

P. Clarkson, D. Gómez–Ullate, Y. Grandati and R. Milson, *Cyclic Maya diagrams and rational solutions of higher order Painlevé systems*, https://arxiv.org/abs/1811.09274.

<u>Título:</u> Asintótica de las integrales catastróficas

<u>Ponente:</u> José Luis López, Universidad Pública de Navarra

Trabajo conjunto con C. Ferreira y Ester Pérez Sinusía.

La teoría de las catástrofes es una herramienta utilizada en la descripción de ciertos fenómenos naturales donde fuerzas suaves producen efectos abruptos, así como en ciertas áreas de la óptica, la acústica y la mecánica cuántica. El ingrediente matemático básico son las integrales catastróficas canónicas simples y dobles [M. V. Berry and C. J. Howls, NIST Handbook of Mathematical Functions, cap. 36]. A diferencia de lo que ocurre con otras funciones especiales, se sabe poco de la asintótica de estas integrales debido a que su carácter altamente oscilatorio dificulta su análisis. En este trabajo nos ocupamos de la familia de integrales canónicas simples de co-dimensión K,

$$\Psi_K(x_1, \ldots, x_K) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}[u^{K+2}+\sum_{m=1}^{K} x_m u^m]} du,$$

para valores grandes de una cualquiera de sus variables $x_1,\ldots, x_m$, digamos x_p, y valores fijos de las restantes. El método clásico de *saddle point* es complicado de aplicar debido a la complejidad del integrando, por lo que utilizamos una versión simplificada de este método introducida en [Lopez & all, 2009]. De este modo, podemos derivar la aproximación asintótica de estas integrales para valores genéricos de K y p en términos de funciones elementales, así como las líneas de Stokes. Observamos que, para $p \neq 1$, esta familia de integrales presenta cuatro regiones diferentes de comportamiento asintótico según el carácter par/impar de K y p. El caso $p = 1$ requiere un análisis diferente. Las fórmulas asintóticas obtenidas permiten rellenar la (casi vacía) sección 36.11 del mencionado capítulo del "NIST Handbook" dedicada al análisis asintótico de estas integrales.

<u>Título:</u> Aproximación Hermite-Padé multinivel a un sistema de funciones meromorfas

<u>Ponente:</u> Guillermo López Lagomasino, Universidad Carlos III de Madrid

Trabajo conjunto con Luis Giraldo González Ricardo y Sergio Medina Peralta.

Se considera cierto tipo de aproximación simultánea Hermite-Padé a un sistema de funciones construido mediante la pertubación racional con coeficientes reales de un sistema de Nikishin. Se prueba la convergencia de dichos aproximantes así como la asintótica logarítmica y del cociente de los polinomios multi-ortogonales correspondientes.

<u>Título:</u> Aplicaciones del problema de Riemann–Hilbert para polinomios matriciales ortogonales

<u>Ponente:</u> Manuel Mañas, Universidad Complutense de Madrid

Trabajo conjunto con Amilcar Branquinho y Ana Foulquié.

Discutiremos el problema de Riemann–Hilbert para el caso de ortogonalidad matricial, tanto para matrices de pesos soportadas sobre curvas sin frontera, *à la Hermite*, como en el caso en que el soporte posee un punto frontera finito, *à la Laguerre*. Con ayuda de la ecuación de Pearson para la matriz de pesos analizaremos, extendiendo la discusión de Durán y colaboradores, cuando aparecen problemas de autovalores para operadores diferenciales de segundo orden. También, se presentaran extensiones de la ecuaciones de Painlevé discretas a esta situación matricial, obteniendo versiones no conmutativas de la dPI, alt-dPI y dPIII. Consideraciones similares para el círculo y para polinomios de Szegő matriciales conducen a extensiones matriciales de la ecuación dPII.

<u>Título:</u> Ortogonalidad, Propiedades electrostáticas de ceros de polinomios ortogonales y cuadratura Gaussiana

<u>Ponente:</u> Francisco Marcellán, Universidad Carlos III de Madrid

En esta presentación analizaremos el papel de los ceros de polinomios ortogonales respecto a medidas soportadas en la recta real y la circunferencia unidad desde diferentes perspectivas. En el segundo caso centraremos nuestra atención en los ceros de polinomios para-ortogonales que juegan el papel de nodos en el análisis de fórmulas de cuadratura Gaussiana en el circulo unidad. Expondremos algunos resultados recientes acerca de la distribución de dichos ceros junto con una interpretación electrostática de los mismos.

<u>Título:</u> Polinomios ortogonales, teorema de Poncelet, rango numérico, productos de Blaschke y más...

<u>Ponente:</u> Andrei Martínez Finkelshtein, Baylor University y Universidad de Almería

Trabajo conjunto con Brian Simanek y Barry Simon.

La relación entre diversos tópicos, tales como los productos de Blaschke, el teorema de Poncelet, o el rango numérico de operadores contractivos ha sido objeto de estudio durante las últimas décadas. El objetivo de esta charla es discutir la recién descubierta conexión existente entre estos temas y los polinomios ortogonales sobre la circunferencia unidad. Esta herramienta permite demostrar varios resultados, interpretar los ya conocidos desde esa nueva perspectiva, así como entender otras posibles conexiones con varias ramas de geometría y análisis.

Título: **Problemas de equilibrio para potenciales de Riesz en el eje real**

Ponente: **Ramón Orive, Universidad de La Laguna**

Trabajo conjunto con P. Dragnev (PFW, Indiana) y D. Benko (Univ. South. Alabama, Mobile).

Es bien conocida la importancia de la teoría del potencial logarítmico como herramienta fundamental para el estudio asintótico de polinomios ortogonales, especialmente desde las importantes contribuciones de H. Stahl, A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, N. Mhaskar y E. B. Saff durante la década de los ochenta del pasado siglo.

El interés por dicha herramienta nos ha llevado, de manera natural, a considerar el mismo problema (existencia, unicidad y caracterización de medidas de equilibrio en presencia de campos externos) para el caso de los potenciales de Riesz, donde, en lugar del núcleo logarítmico, consideramos

$$K(x, y) = \frac{1}{|x - y|^s},$$

siendo $0 < s < 1$ si consideramos como conductor al eje real, o $0 < s < 2$, si trabajamos en $\mathbb{C}$. Habitualmente, se considera al potencial logarítmico como un caso límite cuando $s \to 0^+$.

En esta charla abordaremos un problema aparentemente muy simple, pero que a la postre resulta no serlo tanto: el problema de equilibrio en $\mathbb{R}$ en presencia de una carga atractiva situada en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. A lo largo de la charla pondremos especial énfasis en subrayar las diferencias existentes entre las herramientas disponibles en el caso logarítmico ($s = 0$) y en el caso Riesz ($s > 0$).

<u>Título:</u> Aproximaciones asintóticas de las catástrofes umbílicas

<u>Ponente:</u> Ester Pérez, Universidad de Zaragoza

Trabajo conjunto con Chelo Ferreira y José Luis López.

Las catástrofes umbílicas presentan importantes aplicaciones en óptica, mecánica cuántica o acústica, así como desempeñan un papel fundamental en la aproximación uniforme de integrales. Sin embargo, su comportamiento asintótico apenas ha sido estudiado en la literatura. En este trabajo, presentamos desarrollos asintóticos de estas integrales y experimentos numéricos que ilustran su precisión.

Título: **Aproximación Racional y Ortogonalidad tipo Sobolev**

Ponente: **Héctor Pijeira, Universidad Carlos III de Madrid**

Con frecuencia, la teoría de polinomios ortogonales se presenta sin hacer mención a los problemas de aproximación racional que le dieron origen y actuaron como motivación en una parte significativa de su desarrollo. Probablemente, el resultado más conocido que muestra esta relación sea el Teorema de Markov (*Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues, Acta Math.*, **19** *(1895), 93–104*). Dada una cierta medida μ con soporte compacto contenido en la recta real, $\{P_n\}$ la respectiva sucesión de polinomios ortogonales y $\{Q_n\}$ la sucesión de polinomios asociados o de segundo tipo, dicho teorema establece la convergencia uniforme de la función racional Q_n/P_n a una función $\widehat{\mu}$ que pertenece a cierta clase de funciones holomorfas. Además, se demuestra que la convergencia ocurre con velocidad geométrica (*E.M. Nikishin and V. N. Sorokin, Rational Approximations and Orthogonality, Transl. Math. Monogr.* **92**, *AMS, 1991*).

La teoría de polinomios ortogonales con respecto a productos internos de Sobolev se ha desarrollado intensamente durante las últimas tres décadas, sin vínculos significativos con la aproximación racional de funciones holomorfas. En este trabajo conjunto con Abel Díaz (Univ. Carlos III de Madrid) e Ignacio Pérez (Univ. Autónoma de Santo Domingo), se demuestra un análogo al Teorema de Markov sobre aproximación racional de ciertas funciones holomorfas. En este caso la sucesión de funciones racionales está constituida por los polinomios ortogonales con respecto a un producto de Sobolev discreto y los polinomios asociados que se construyen. También damos un estimado de la velocidad de convergencia.

Los productos de Sobolev discretos que se consideran (*"secuencialmente ordenados"*), generalizan a los empleados en múltiples trabajos anteriores, para garantizar que los ceros de los respectivos polinomios ortogonales sean reales y simples. El preprint se puede consultar en *A. Díaz, H. Pijeira, and I. Pérez. Rational Approximation and Sobolev-type Orthogonality*, arXiv:1907.12243.

Título: Sobre h-armónicos

Ponente: Miguel A. Piñar, Universidad de Granada

En esta charla exploramos las propiedades de algunas familias de polinomios ortogonales asociadas a funciones peso sobre la esfera que son invariantes frente a ciertos grupos de reflexiones: los llamados h-armónicos. En este contexto es posible desarrollar una teoría de polinomios ortogonales homogéneos análoga a la de los armónicos esféricos estándar. Para ello, los operadores en derivadas parciales de primer orden estándar son reemplazados por una familia de operadores en derivadas de primer orden: los llamados operadores de Dunkl.

Título: Relaciones de Incertidumbre Entrópicas y Funciones de Bessel

Ponente: Jesús Sánchez–Dehesa, Universidad de Granada

Las relaciones de incertidumbre entrópicas juegan un papel fundamental tanto en el problema de la estabilidad de la materia como en el enorme esfuerzo internacional que actualmente se está llevando a cabo con las emergentes formas de procesamiento de la información necesarias para construir los ordenadores cuánticos. Sin embargo todavía hay pendientes una serie de desafíos físico-matemáticos. En esta charla se mostrará la mejora de las relaciones de incertidumbre de los sistemas cuánticos multidimensionales basadas en la entropías de Shannon y Rényi, donde la simetría esférica y las propiedades de los armónicos hiperesféricos, las funciones de Bessel y las transformaciones de Hankel juegan un papel central.

Título: Desarrollo en fracción continua de ciertas series de Engel y Pierce que dan lugar a números transcendentes

Ponente: **Juan Luis Varona, Universidad de La Rioja**

Una serie de Engel es la suma de los inversos de una sucesión creciente de enteros positivos de tal forma que cada término es divisible por el anterior, es decir,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{y_1 y_2 \cdots y_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{x_j};$$

una serie de Pierce es similar pero con una serie alternada

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{y_1 y_2 \cdots y_j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{x_j}.$$

En ambos casos, $y_1 = x_1$ y $y_{n+1} = x_{n+1}/x_n$ para $n \geq 1$.

Siguiendo lo publicado en los artículos [1, 2, 3], veremos cuál es el desarrollo en fracción continua de ciertas series de Engels y Pierce. A partir de dichos desarrollos, y aplicando el teorema de Roth sobre aproximación por racionales, comprobaremos que tales series dan lugar a números transcendentes.

Referencias

[1] A. N. W. Hone, Curious continued fractions, nonlinear recurrences and transcendental numbers, *J. Integer Seq.* **18** (2015), no. 8, article 15.8.4, 10 pp.

[2] A. N. W. Hone y J. L. Varona, Continued fractions and irrationality exponents for modified Engel and Pierce series, *Monatsh. Math.*, en prensa. DOI: 10.1007/s00605-018-1244-1

[3] J. L. Varona, The continued fraction expansion of certain Pierce series, *J. Number Theory* **180** (2017), 573–578.

Resúmenes de pósteres

Título: Cuadratura Gaussiana para medida discreta aplicada al problema clásico de aproximación de mínimos cuadrados

Ponente: **Lourenço de Lima Peixoto, Universidad de Santiago de Compostela**

Desarrollamos los problemas computacionales relacionados con un algoritmo rápido para el polinomio de mínimos cuadrados con un gran número N de términos. El algoritmo requiere el cálculo de los puntos y pesos de la cuadratura de Gauss para la medida discreta de los polinomios ortogonales de Gram. El polinomio de mínimos cuadrados de grado n se calcula con doble precisión para todo $n \ll N$.

Título: La parte radial de polinomios ortogonales no estándar en la bola

Ponente: **Fátima Lizarte, Universidad de Cantabria**

Trabajo conjunto con Teresa E. Pérez y Miguel A. Piñar

Nosotros consideramos un producto escalar de Sobolev en la bola unidad de dimensión d que involucra derivadas en la dirección normal. En primer lugar, usando coordenadas polares-esféricas, construimos explícitamente una base mutuamente ortogonal de polinomios que son dados en términos de armónicos esféricos y una familia de polinomios ortogonales univariados de Sobolev en la parte radial. A continuación, nos centramos en el estudio de estos últimos polinomios, deduciendo propiedades algebraicas y analíticas.

Referencias C. F. Dunkl, Y. Xu, *Orthogonal polynomials of several variables*, 2nd edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 155, Cambridge Univ. Press, 2014.

F. Lizarte, T. E. Pérez, M. A. Piñar, *The radial part of a class of Sobolev polynomials on the unit ball*, Preprint, (2019).

T. E. Pérez, M. A. Piñar, Y. Xu, *Weighted Sobolev orthogonal polynomials on the unit ball*, J. Approx. Theory 171 (2013) 84–104.

Título: Autovalores de un operador diferencial asociado a polinomios ortogonales discretos de Sobolev clásicos

Ponente: Juan Francisco Mañas Mañas, Universidad de Almería

Trabajo conjunto con Juan José Moreno Balcázar

Los polinomios hipergeométricos continuos clásicos (PHCC) han sido muy bien estudiados desde el pasado siglo. Estos PHCC pueden ser definidos como las soluciones polinómicas de la **ecuación diferencial hipergeométrica**

$$\sigma(x)y''(x) + \tau(x)y'(x) = \lambda_n y(x), \tag{1}$$

donde σ y τ son polinomios con $\deg(\sigma) \leq 2$, $\deg(\tau) = 1$ y $\lambda_n = n\left(\tau'(x) + \frac{n-1}{2}\sigma''(x)\right)$.

La ecuación (1) puede ser reescrita como $\boldsymbol{B}[y(x)] = \lambda_n y(x)$, donde $\boldsymbol{B}$ es un operador diferencial. De esta forma, los PHCC son las autofunciones del operador diferencial $\boldsymbol{B}$ y λ_n son los correspondientes autovalores.

Consideramos los polinomios $q_n(x)$, ortonormales con respecto al producto escalar

$$(f, g)_S = \int f(x)g(x)d\mu + Mf^{(j)}(c)g^{(j)}(c), \qquad j \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

con $c \in \mathbb{R}$, $M > 0$ y μ es una medida continua clásica con soporte en la recta real. En [1] los autores imponen condiciones de manera que los polinomios $q_n(x)$ son autofunciones de un cierto operador diferencial, y nuestro principal resultado, es obtener el comportamiento asintótico de los autovalores de este operador diferencial. Hemos probado que este comportamiento asintótico es diferente del comportamiento de λ_n. Una primera aproximación de este problema fue dada en [2] y los resultados han sido recientemente publicados en [3].

Referencias

[1] I. H. Jung, K. H. Kwon, G. J. Yoon, *Differential equations of infinite order for Sobolev-type orthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math. **78** (1997), 277–293.

[2] L. L. Littlejohn, J. F. Mañas–Mañas, J. J. Moreno–Balcázar, R. Wellman, *Differential operator for discrete Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials: Eigenvalues and asymptotics*, J. Approx. Theory, **230** (2018), 32–49.

[3] J. F. Mañas–Mañas, J. J. Moreno–Balcázar, *Classical Sobolev Orthogonal Polynomials: Eigenvalue Problem*, Results Math. **74** (4) (2019), Art. 144, 12pp. ArXiv

<u>Título:</u> Trasformaciones de Geronimus de funcionales lineales bivariados

<u>Ponente:</u> Misael E. Marriaga, Universidad Rey Juan Carlos

Trabajo conjunto con Francisco Marcellán, Teresa E. Pérez y Miguel A. Piñar

Sea **u** un funcional lineal definido en el espacio lineal de los polinomios bivariados con coeficientes reales y sea $\lambda(x, y)$ un polinomio. En este trabajo estudiamos las transformaciones de Geronimus de **u**, es decir, aquellos funcionales **v** tales que $\mathbf{u} = \lambda(x, y)\mathbf{v}$. Deducimos fórmulas de conexión entre los polinomios ortogonales bivariados asociados a **u** y **v** y además, damos una interpretación matricial usando las factorizaciones LU y UL por bloques de las matrices de Jacobi asociadas a los polinomios ortogonales. Finalmente, presentamos algunos ejemplos ilustrativos de transformaciones de Geronimus de pesos definidos en dominios de $\mathbb{R}^2$.

Referencias

M. Alfaro, A. Peña, T. E. Pérez, M. L. Rezola, *On linearly related orthogonal polynomials in several variables*, Numer. Algorithms **66** (2014), 525-553.

G. Ariznabarreta, M. Mañas, *Christoffel transformations for multivariate orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory **225** (2018), 242-283.

A. M. Delgado, L. Fernández, T. E. Pérez, M. A. Piñar, *Multivariate orthogonal polynomials and modified moment functionals*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **12** (2016), Paper No. 090, 25pp.

M. Derevyagin, J.C. García-Ardila, F. Marcellán, *Multiple Geronimus transformations*, Linear Algebra Appl. **454** (2014), 158-183.

<u>Título:</u> Condicionamiento numérico en muestreos aleatorios y deterministas de polinomios de Zernike

<u>Ponente:</u> Darío Ramos López, **Universidad Rey Juan Carlos**

Los polinomios de Zernike son una importante herramienta en el estudio de la visión humana. Forman un conjunto completo de polinomios ortogonales en el disco unidad, con respecto a la medida continua plana de Lebesgue. Debido a la correspondencia de los primeros polinomios de Zernike con las aberraciones ópticas básicas, se han convertido en un estándar en el campo de la óptica y la oftalmología.
En la mayoría de aplicaciones prácticas, estos polinomios se utilizan de forma discreta, mediante su muestreo en conjuntos finitos de nodos del disco unidad. Así, se pierden algunas de sus propiedades más interesantes, entre ellas la ortogonalidad. Además, generalmente se usan para resolver problemas de mínimos cuadrados con la matriz evaluaciones. Estos problemas pueden estar mal condicionados numéricamente si los nodos no se escogen adecuadamente.
En [1] se analiza el condicionamiento de este problema para distintas elecciones de nodos, incluyendo mallas regulares, pseudo-regulares, aleatorias y un muestreo en espiral. Entre las conclusiones destaca la gran importancia de la elección de nodos para la estabilidad numérica del problema, y de los patrones estudiados, el espiral es el más adecuado. No obstante, este patrón espiral también presenta limitaciones serias cuando se quiere utilizar una cantidad de polinomios de Zernike relativamente grande, incluso en órdenes medianos.
En [2], se ha propuesto un nuevo esquema de muestreo, mediante la colocación de nodos en circunferencias concéntricas dentro del disco unidad, y con densidad de nodos mayor conforme más cerca se está del borde. Este patrón se corresponde con el comportamiento general de los polinomios de Zernike, al ser más suaves por el centro y más oscilantes en la periferia del disco.
Con este nuevo muestreo se obtene una mejora de bastantes órdenes de magnitud, dependiendo del tamaño de la base de polinomios de Zernike utilizada. Este nuevo esquema también muestra un crecimiento con respecto a dicho tamaño mucho más lento que el resto de muestreos existentes, dando como resultado una gran estabilidad numérica para la resolución de los problemas de mínimos cuadrados.

Referencias

[1] Navarro, R., Arines, J., Rivera, R. Direct and inverse discrete Zernike transform. *Optics Express*, 26 (17) (2009), 24269-24281.

[2] Ramos-López, D., Fernández Martínez, M, Sánchez Granero, M.A., Martínez-Finkelshtein, A. Optimal sampling patterns for Zernike polynomials. *Applied Mathematics and Computation*, 274 (2016), 247–257.

Lista de Participantes

Manuel Alfaro García	Universidad de Zaragoza
María Álvarez de Morales Mercado	Universidad de Granada
Renato Álvarez Nodarse	Universidad de Sevilla
Iván Area Carracedo	Universidad de Vigo
Alicia Cachafeiro López	Universidad de Vigo
María José Cantero Medina	Universidad de Zaragoza
Ana María Caparros Martínez	Universidad de Almería
Ana Belén Castaño Fernández	Universidad de Almería
Gracia Castro de Luna	Universidad de Almería e INVISION
Óscar Ciaurri Ramírez	Universidad de La Rioja
Roberto S. Costas Santos	Universidad de Alcalá
Antonia Delgado Amaro	Universidad de Granada
Antonio J. Durán Guardeño	Universidad de Sevilla
Lidia Fernández Rodríguez	Universidad de Granada
Juan Carlos García Ardila	Universidad Politécnica de Madrid
Amparo Gil Gómez	Universidad de Cantabria
David Gómez–Ullate Oteiza	Universidad de Cádiz
Lourenço de Lima Peixoto	Universidad de Santiago de Compostela
Fátima Lizarte López	Universidad de Cantabria
José Luis López García	Universidad Pública de Navarra
Pedro López Artés	Universidad de Almería
Guillermo López Lagomasino	Universidad Carlos III de Madrid
Manuel Mañas Baena	Universidad Complutense de Madrid
Juan Francisco Mañas Mañas	Universidad de Almería
Francisco Marcellán Español	Universidad Carlos III de Madrid
Misael E. Marriaga Castillo	Universidad Rey Juan Carlos
Clotilde Martínez Álvarez	Universidad de Granada
Andrei Martínez Finkelshtein	Baylor University y Universidad de Almería
Pedro Martínez González	Universidad de Almería
Leandro Moral Ledesma	Universidad de Zaragoza
Juan José Moreno Balcázar	Universidad de Almería
Ramón Orive Rodríguez	Universidad de La Laguna
Teresa E. Pérez Fernández	Universidad de Granada

Ester Pérez Sinusía	Universidad de Zaragoza
Héctor Pijeira Cabrera	Universidad Carlos III de Madrid
Miguel A. Piñar González	Universidad de Granada
Darío Ramos López	Universidad Rey Juan Carlos
Joaquín Sánchez Lara	Universidad de Granada
Jesús Sánchez–Dehesa Moreno–Cid	Universidad de Granada
Juan Luis Varona Malumbres	Universidad de La Rioja
Alejandro Zarzo Altarejos	Universidad Politécnica de Madrid

Información de utilidad

¿Cómo llegar a la UAL?

Desde la organización recomendamos algunas formas de llegar a la Universidad de Almería (UAL):

Viaje de ida:

Desde el centro de Almería la mejor opción para llegar a la UAL es caminar unos minutos hasta el "Paseo de Almería". A lo largo de esta calle hay varias paradas de bus. En estas paradas pasan las líneas L11 (ver info aquí) y L18 (ver info aquí). En estos enlaces se pueden consultar todos los horarios y el itinerario completo.

Viaje de vuelta:

Para volver en bus desde la UAL al centro de Almería recomendamos coger las líneas L12 (ver info aquí) o la Linea L18 (ver info aquí).

En caso de coger la Línea L12 hay que bajarse entre las paradas "*Rambla-Oliveros*" y "*Rambla 54*", dependiendo de la ubicación del hotel elegido.

En caso de tomar la Línea L18 hay que bajarse entre las paradas "*Rambla-Oliveros*" y "*Pablo Iglesias*", dependiendo de la ubicación del hotel elegido.

Otras ubicaciones:

Para los participantes que decidan quedarse en hoteles más lejanos del centro, para llegar a la UAL consultar la página oficial de SURBUS. Y por supuesto, siempre está la opción de usar **Google Maps**.

Red WIFI

Los asistentes al encuentro disponen de una red WIFI. Los datos son:

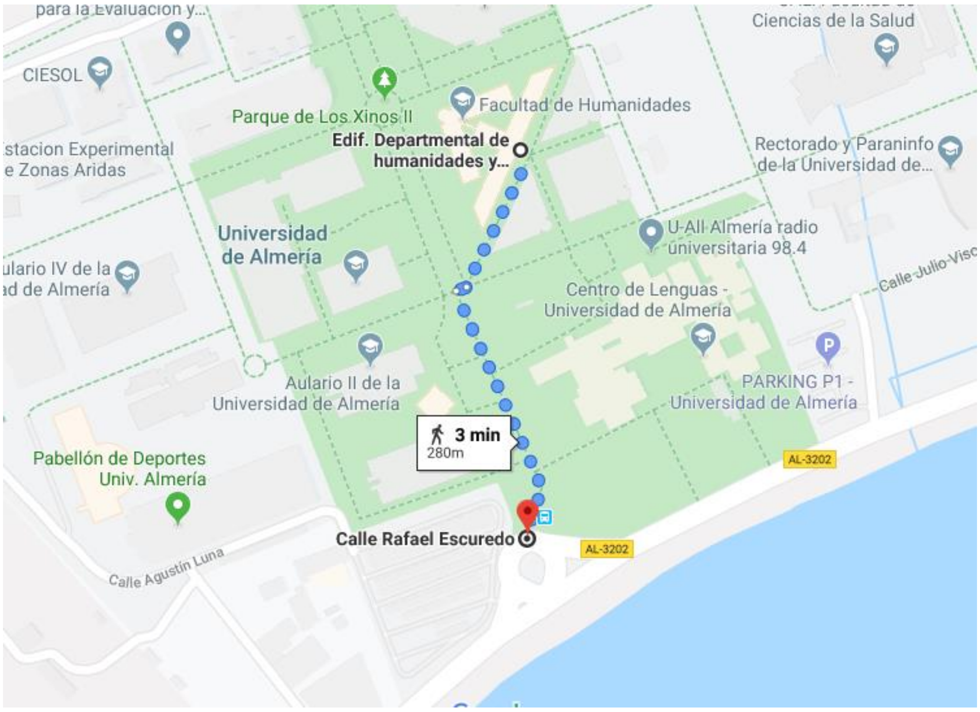
- **Nombre de la red WIFI:** TAPO2019

- **Contraseña:** 25aniversarioTAPO

Lugar del encuentro

El encuentro tendrá lugar en el **AULA MAGNA** de la UAL, situada en la planta baja del **EDIFICIO DEPARTAMENTAL DE HUMANIDADES Y CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN II** (también conocido como **EDIFICIO C**).

Para llegar a este edificio, hay que tener en cuenta que el campus universitario de la UAL cuenta con 2 paradas de bus, la parada **sur** junto al mar y la parada **norte**. Para llegar a este edificio, mirar los planos con el itinerario a seguir en función de la parada de bus en la página siguiente.



Itinerario desde la parada de bus SUR al Edificio C.

Itinerario desde la parada de bus NORTE al Edificio C.

Patrocinadores

Universidad de Almería y Departamento de Matemáticas de la Universidad de Almería

Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional

Grupo de investigación Teoría de aproximación y polinomios ortogonales

Centro de Desarrollo y Transferencia de Investigación Matemática a la Empresa

Universidad de Granada

INVISION – Instituto de la visión