Parámetros de localización y dominación de un grafo y su complementario

Carmen Hernando
Mercè Mora
Ignacio M. Pelayo

VIII JMDA, Almería 2012

Definiciones

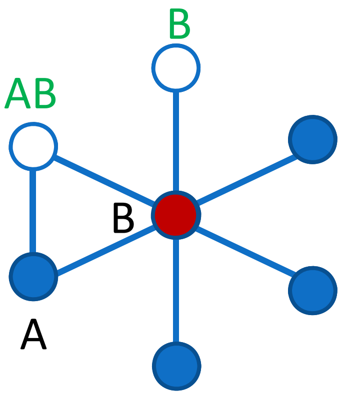
$G=(V, E)$, $S \subseteq V$,

- S *domina* G $\Leftrightarrow \forall v \in V \setminus S \ \exists\, a \in S$: a y v son adyacentes
- S *localiza* G $\Leftrightarrow \forall u,v \in V \ \ \exists\, a \in S$: $d(u,a) \neq d(v,a)$
- *S domina-localiza* G $\Leftrightarrow \forall u,v \in V \setminus S \ \ \emptyset \neq N(u) \cap S \neq N(v) \cap S \neq \emptyset$

    l-d conjunto

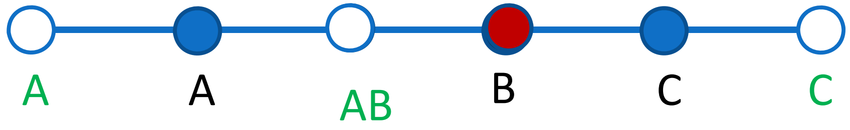
Denotamos	Cardinal mínimo de conjuntos que	Conjuntos de cardinal mínimo
$\gamma(G)$	dominan	γ-conjunto
$\beta(G)$	localizan	β-conjunto
$\eta(G)$	dominan y localizan	η-conjunto
$\lambda(G)$	domina-localiza	λ-conjunto

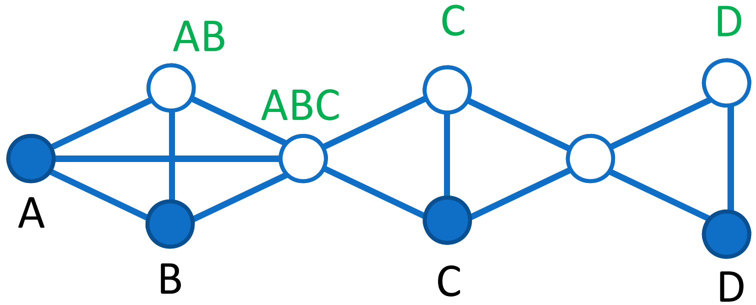
Ejemplos



γ(G)=1
β(G)=4
λ(G)=η(G)=5

β(G)=1 η(G)=γ(G)=2 λ(G)=3





γ(G)=2 λ(G)=η(G)=β(G)=4

- máx $\{\gamma(G), \beta(G)\} \leq \eta(G) \leq \lambda(G)$
- $\eta(G) \leq \gamma(G) + \beta(G)$

Definiciones

G=(V, E),

•Complementario de *G*: $\overline{G} = (V, \overline{E})$

$$\forall u,v \in V \ \ \mathrm{uv} \in \overline{E} \Leftrightarrow \mathrm{uv} \notin E$$

•G doblemente conexo ⇔ $G, \overline{G}$ conexos

•G autocomplementario ⇔ $G = \overline{G}$

Ejemplos: $P_4 = \overline{P_4}, C_5 = \overline{C_5}$

•Cotas tipo Nordhaus-Gaddum: $\ldots \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \ldots$

Previos

- Resultados tipo Nordhaus-Gaddum para $\gamma(G)$
- Valores extremos de $\beta(G)$, $\eta(G)$ y $\lambda(G)$
- Caracterización de grafos con $\beta(G) \in \{1, n-1, n-D\}$
- Caracterización de grafos con

$$\eta(G), \lambda(G) \in \{1, 2, n-1, n-2\}$$

Previos

[HO] Henning, Oellermann,
Metric-locating-dominating sets in graphs,
Ars Combin., 73, 129–141, 2004.

[HMPSW] Hernando, Mora, Pelayo, Seara ,Wood,
Extremal graph theory for metric dimension and diameter,
Electron. J. Combin., 17, R30, 2010.

[CHMPP] Cáceres, Hernando, Mora, Pelayo, Puertas,
Locating dominating codes: Bounds and extremal cardinalities,
http://arxiv.org/abs/1205.2177, 2012.

Previos

- Grafos conexos de orden *n* con $\beta(G) \in \{1, n-1, n-D\}$
  - $\beta(G)=1 \Leftrightarrow G$ es un camino
  - $\beta(G)=n-1 \Leftrightarrow G=K_n$
  - $\beta(G)=n-2 \Leftrightarrow G \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$ [ChEJO]
  - $\beta(G)=n-D$ [HMPW]
- Grafos conexos con $\eta(G), \lambda(G) \in \{1, 2, n-1, n-2\}$
  - $\eta(G)=1 \Leftrightarrow \lambda(G)=1 \Leftrightarrow G=P_2$
  - $\eta(G)=n-1 \Leftrightarrow \lambda(G)=n-1 \Leftrightarrow G=K_n$ ó $G=K_{1,n-1}$
  - $\eta(G)=n-2 \Leftrightarrow G \in \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_7$ [HO] $\Leftrightarrow \lambda(G)=n-2$
  - $\eta(G)=2$, $\lambda(G)=2$ [CHMPP]

Resultados

- Resultados tipo Nordhaus-Gaddum para β(G), η(G) y λ(G)
  - Caso general
  - Caso G doblemente conexo

- Estudio del parámetro λ en un grafo y su complementario
  - Caso general
  - Caso árboles

Resultados Nordhaus-Gaddum
Caso General

G grafo no trivial de orden n

$$2 \le \beta(\mathrm{G}) + \beta(\overline{\mathrm{G}}) \le 2n-1$$

$$G = P_4$$

$$3 \le \eta(\mathrm{G}) + \eta(\overline{\mathrm{G}}) \le 2n-1$$

$$\{G, \overline{G}\} = \{K_n, \overline{K}_n\}$$

$$3 \le \lambda(\mathrm{G}) + \lambda(\overline{\mathrm{G}}) \le 2n-1$$

$$\{G, \overline{G}\} = \{P_2, \overline{P}_2\}$$

Resultados Nordhaus-Gaddum para β
Caso doblemente conectado

$$2 \leq \beta(\mathrm{G}) + \beta(\overline{\mathrm{G}}) \leq 2(n-3)$$

Cota inferior

$$\bullet\ \beta(\mathrm{G}) + \beta(\overline{\mathrm{G}}) = 2 \Leftrightarrow G = P_4$$

Cota superior

$$\left.\begin{array}{l}
\bullet\ \beta(\mathrm{G}) = \mathrm{n}\text{-}1 \Leftrightarrow G = K_n \\
\bullet\ \beta(G) = \mathrm{n}\text{-}2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} G = K_{r,s} \\ G = K_r + \overline{K_s} \\ G = K_r + (K_1 \cup \overline{K_s}) \end{array} \right\}
\end{array}\right\} \overline{G} \text{ no conexo}$$

$$\beta(\mathrm{G}) + \beta(\overline{\mathrm{G}}) = 2(n-3) \Leftrightarrow \beta(\mathrm{G}) = \beta(\overline{\mathrm{G}}) = (n-3)$$

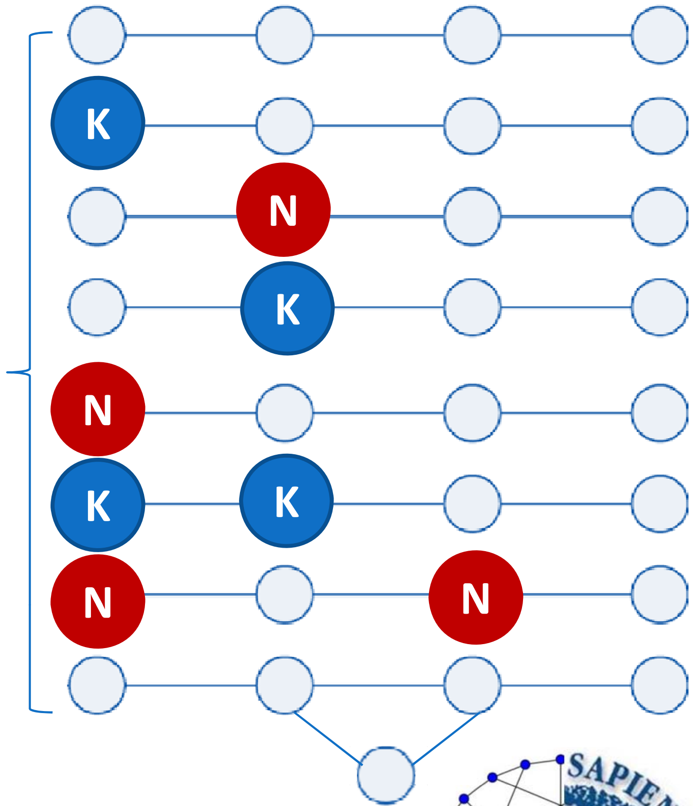
$$\beta(\mathrm{G}) = (n-3) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Diam(\mathrm{G}) = 3 \\ Diam(\mathrm{G}) = 2 \end{array} \right\}$$

Resultados Nordhaus-Gaddum para β
Caso doblemente conectado

Cota superior

$$2 \leq \beta(\mathrm{G}) + \beta(\bar{\mathrm{G}}) \leq 2(n-3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta(\mathrm{G}) = (n-3) \\ Diam(\mathrm{G}) = 3\end{array}\right] \Rightarrow \text{[HMPW'10]} \Rightarrow \beta\,(\overline{G}) = \text{n-3} \Rightarrow$$



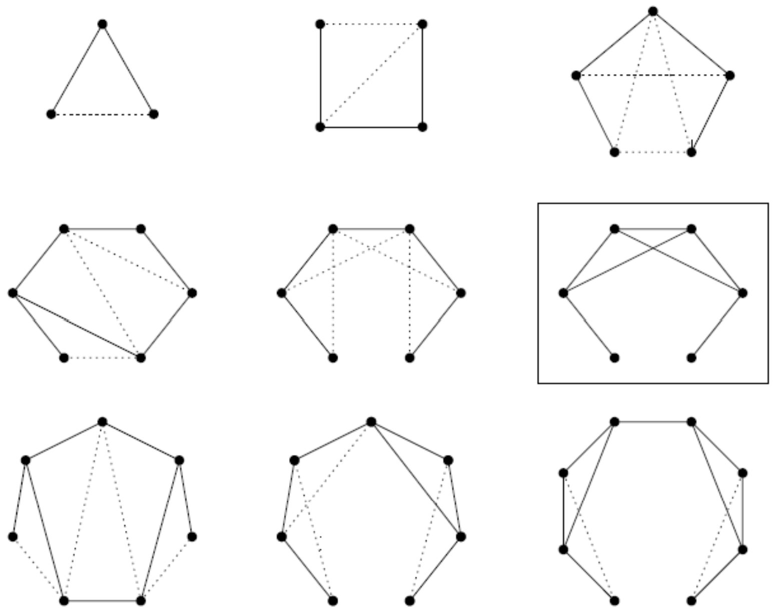
$$\left.\begin{array}{l}\beta(\mathrm{G}) = (n-3) \\ Diam(\mathrm{G}) = 2\end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\beta(\overline{\mathrm{G}}) = (n-3) \\ Diam(\overline{\mathrm{G}}) = 2\end{array}\right] \Rightarrow G = C_5$$

Resultados Nordhaus-Gaddum para η
Caso doblemente conectado

$$4 \le \eta(\mathrm{G}) + \eta(\overline{\mathrm{G}}) \le 2n - 5$$

Cota inferior

$$4 = \eta(\mathrm{G}) + \eta(\overline{\mathrm{G}}) \Leftrightarrow \eta(\mathrm{G}) = \eta(\overline{\mathrm{G}}) = 2$$



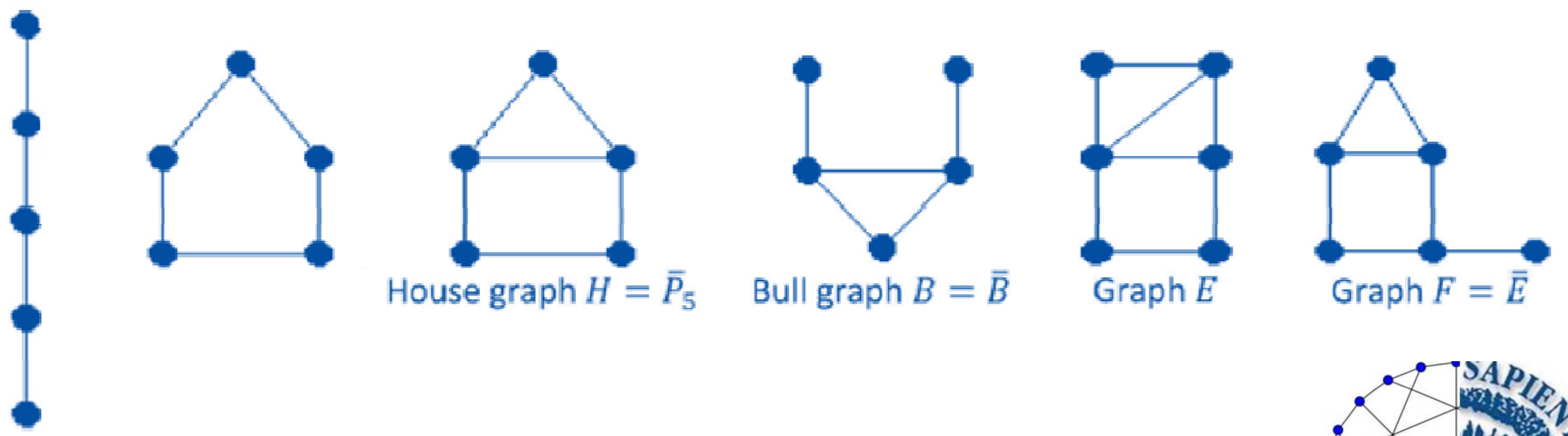
Grafos con $\eta(\mathrm{G})=2$

Resultados Nordhaus-Gaddum para η
Caso doblemente conectado

$$4 \le \eta(G) + \eta(\overline{G}) \le 2n - 5$$

Cota inferior

$$4 = \eta(G) + \eta(\overline{G}) \Leftrightarrow \eta(G) = \eta(\overline{G}) = 2$$



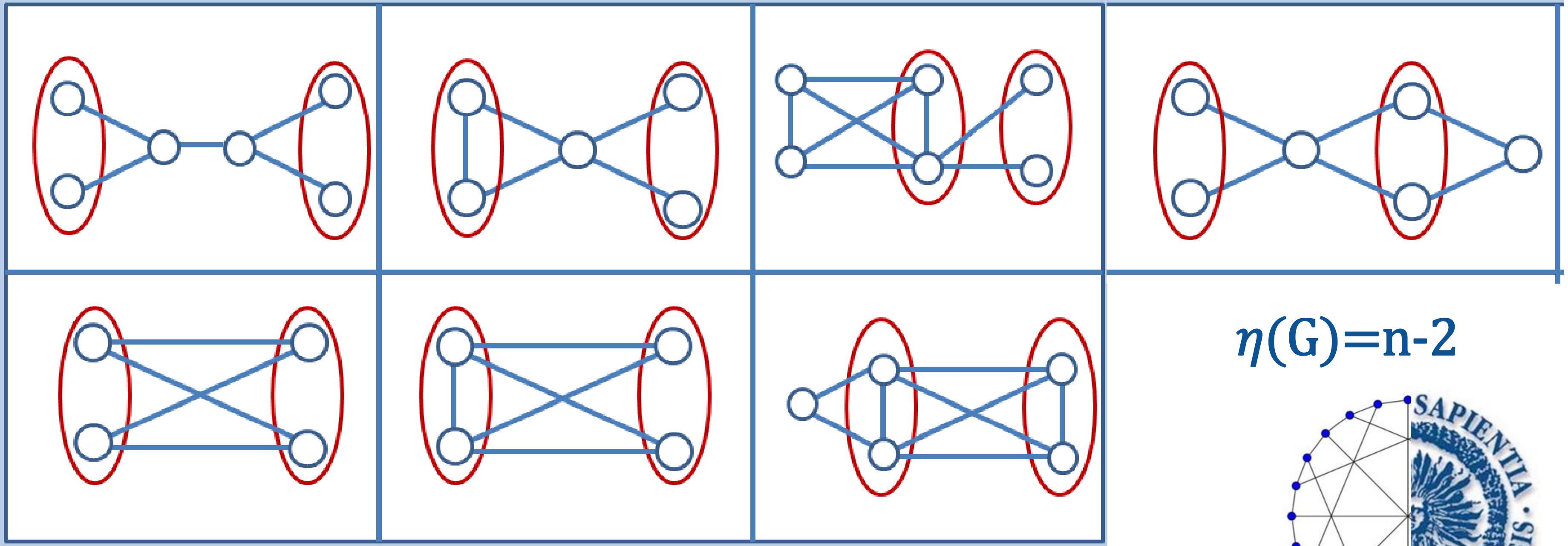
Resultados Nordhaus-Gaddum para η
Caso doblemente conectado

Cota superior

$$4 \le \eta(G) + \eta(\overline{G}) \le 2n - 5$$

$\eta(G)$=n-1 $\Leftrightarrow$ $G = K_n$ ó $G = K_{1,n-1}$ $\Rightarrow$ $\overline{G}$ no conexo

Henning-Oellermann'04



η(G)=n-2

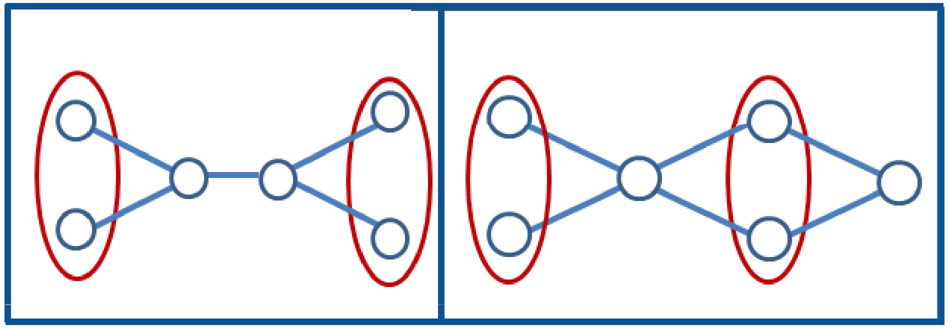
Resultados Nordhaus-Gaddum para η Caso doblemente conectado

$$4 \leq \eta(\mathrm{G}) + \eta(\overline{\mathrm{G}}) \leq 2n - 5$$

Cota superior

$$\eta(\mathrm{G}) + \eta(\overline{\mathrm{G}}) = 2n - 5$$

$$\eta(\mathrm{G}) = n - 2$$



Y sus complementarios

$$\eta(\overline{\mathrm{G}}) = n - 3$$

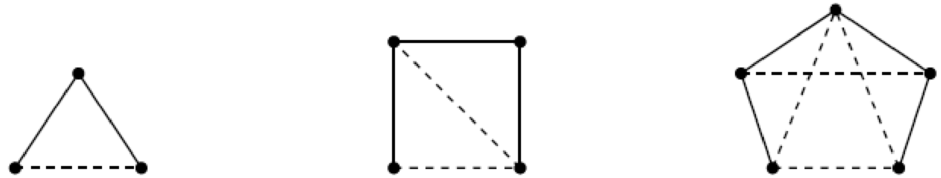
Resultados Nordhaus-Gaddum para λ
Caso doblemente conectado

$$4 \leq \lambda(\mathrm{G}) + \lambda(\bar{\mathrm{G}}) \leq 2n - 5$$

Cota inferior

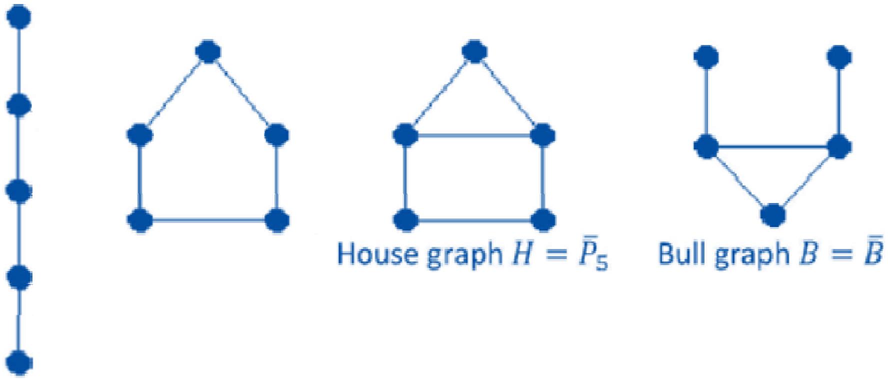
$$4 = \lambda(\mathrm{G}) + \lambda(\overline{\mathrm{G}}) \Leftrightarrow \lambda(\mathrm{G}) = \lambda(\overline{\mathrm{G}}) = 2$$

Grafos con λ(G)=2



$n = 3$ $n = 4$ $n = 5$

$$4 = \lambda(\mathrm{G}) + \lambda(\overline{\mathrm{G}})$$



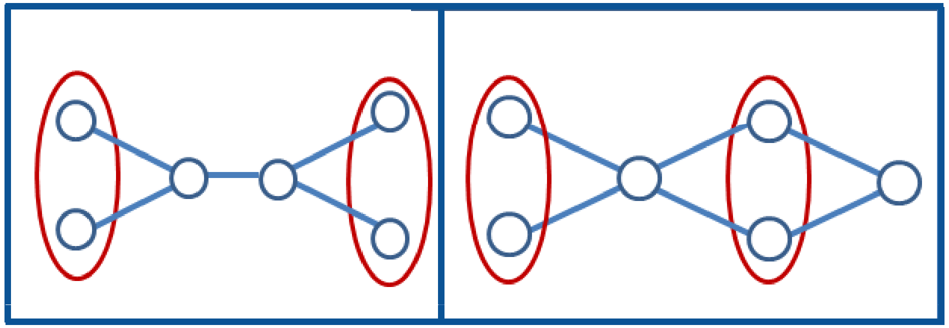
House graph $H = \bar{P}_5$ Bull graph $B = \bar{B}$

Resultados Nordhaus-Gaddum para η
Caso doblemente conectado

$$4 \le \lambda(\mathrm{G}) + \lambda(\bar{\mathrm{G}}) \le 2n - 5$$

Cota superior

$$\lambda(\mathrm{G}) + \lambda(\overline{\mathrm{G}}) = 2n - 5$$



Y sus complementarios

Estudio comparativo de $\lambda(G)$ y $\lambda(\bar{G})$

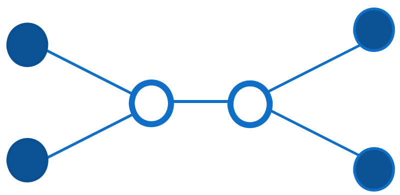
Proposición

S es *l-d* conjunto de G entonces S es *l-d* conjunto del complementario, salvo si existe un vértice w: $S \subseteq N(w)$. En este caso $S \cup \{w\}$ es l-d conjunto del complementario.

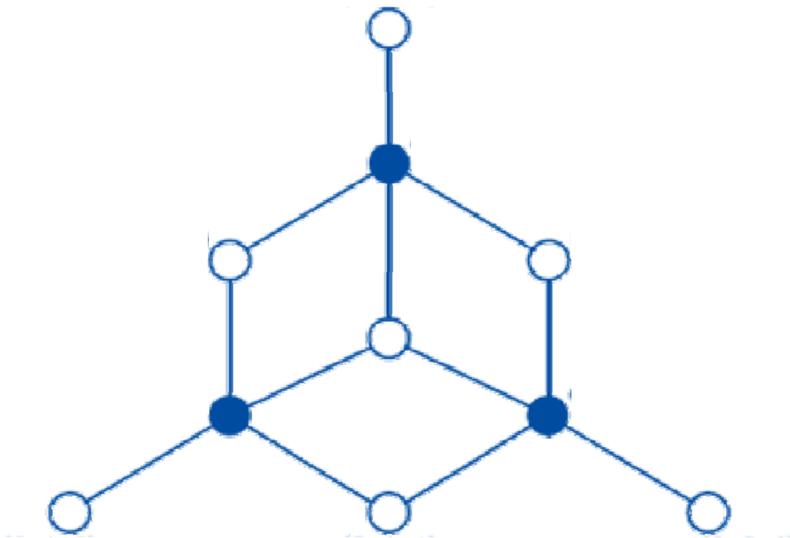
Teorema $$\left|\lambda(G) - \lambda(\overline{G})\right| \leq 1$$

Corolario $$2\lambda(G)-1 \leq \lambda(G) + \lambda(\bar{G}) \leq 2\lambda(G)+1$$

Estudio comparativo de $\lambda(G)$ y $\lambda(\overline{G})$



$$\lambda(G) > \lambda(\overline{G})$$
$$|E(G)| < |E(\overline{G})|$$



$$\lambda(G) < \lambda(\overline{G})$$
$$|E(G)| < |E(\overline{G})|$$

Estudio de $\lambda(G)$ y $\lambda(\bar{G})$ en árboles

Teorema

Sea T un árbol, $T \neq P_2$. Entonces $\lambda(T) \geq \lambda(\bar{T})$.

Lema

Sea T un árbol, $T \neq P_5, T \neq K_{1,n-1}$. Entonces existe un λ- conjunto S tal que $S \not\subseteq N(v) \quad \forall v \in V(T) \setminus S$.

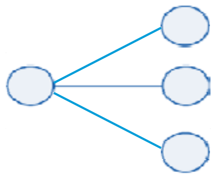
Teorema

Si todos los λ-conjuntos de un árbol T son conjuntos totalmente dominantes, entonces $\lambda(T) = \lambda(\bar{T})$.

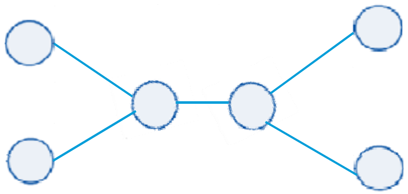
Un conjunto dominante S de un grafo G se dice que es totalmente dominante si el subgrafo inducido por S no contiene vértices aislados.

Estudio de familias de árboles

$$\lambda(P_2)=1, \lambda(\overline{P}_2)=2$$



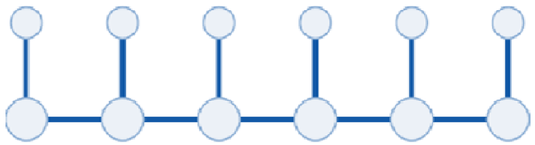
$$G=K_{1,n-1}, n\geq 3 \Rightarrow \overline{G}$$ no conexo, $\lambda(\mathrm{G})=\lambda(\overline{\mathrm{G}})$



$$G=K_2(r,s)\Rightarrow \lambda(\mathrm{G})=\lambda(\overline{\mathrm{G}})+1$$

$$G=P_n, n=5k+1, n=5k+3\Rightarrow \lambda(\mathrm{G})=\lambda(\overline{\mathrm{G}})+1$$

$$\lambda(\overline{P}_n)=\lambda(P_{n-1}), n\neq 2, n\neq 6$$



$$G=Comb_{2n}, n\geq 4\Rightarrow \lambda(\mathrm{G})=\lambda(\overline{\mathrm{G}})+1$$

Problemas abiertos

- Caracterización árboles con $\lambda(\mathrm{T}) = \lambda(\overline{\mathrm{T}})$
- Caracterización grafos con $\lambda(\mathrm{G}) = \lambda(\overline{\mathrm{G}})$
- Estudio en grafos unicíclicos
- Calcular $\lambda(\overline{\mathrm{G}})$ a partir de $\lambda(\mathrm{G})$