Clasificación de 3-semigrupos numéricos mediante L-formas

VIII JMDA 2012, Almería.

Francesc Aguiló Gost,
Dept. MA-IV, Univ. Politècnica de Catalunya, Barcelona.

Carlos Marijuán López,
Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Valladolid, Valladolid.

Semigrupos numéricos

Semigrupos numéricos

S es un semigrupo numérico, i.e.
un subsemigrupo aditivo de $\mathbb{N}$ con $0 \in S$ y $\mathrm{mcd}(S) = 1$.

$\mathbb{N} - S$ es finito y $\delta(S) = \mathrm{Card}(\mathbb{N} - S)$ denota el número de *lagunas* de S.

El *conductor* de S es $\mathrm{c}(S) = \min\{s \in S : \; n \geq s \Longrightarrow n \in S\}$.

El *número de Frobenius* de S es $\mathfrak{f}(S) = \mathrm{c}(s) - 1$.

S admite un conjunto mínimo de generadores: $S = \langle b_0, ..., b_g \rangle$,
$b_0 = \min(S - \{0\})$, $b_{i+1} = \min(S - \langle b_0, ..., b_i \rangle)$, $i = 0, ..., g - 1$.

El *conjunto de Apéry* de S, respecto de b_0, es
$\mathrm{Ap}(S, b_0) = \{s \in S : s - b_0 \notin S\}$.

Curva monomial asociada a un semigrupo numérico

Los S son útiles en el estudio de singularidades de curvas algebraicas.

Si $S = \langle b_0, ..., b_g \rangle$, entonces $X_0 = t^{b_0}, \ldots, X_g = t^{b_g}$ es la *curva monomial* asociada a S.

La inmersión de la curva monomial en el espacio afín $\mathbf{A}_{g+1}$ viene dada por el homomorfismo de K-álgebras

$$\begin{array}{ccc} \phi_0 : A = K[X_0, \ldots, X_g] & \longrightarrow & K[t^{b_0}, \ldots, t^{b_g}] \\ X_i & \longrightarrow & t^{b_i} \\ X_0^{\lambda_0} \ldots X_g^{\lambda_g} & \longrightarrow & t^{\lambda_0 b_0 + \ldots \lambda_g b_g} = t^m \end{array}$$

En este sentido, un problema en el semigrupo es ahora un problema en el ideal $\ker \phi_0$, y viceversa, y

$$R = \operatorname{Im} \phi_0 = K[t^m, m \in S] = K[S]$$

es el álgebra de coordenadas afines de la curva monomial asociada a S.

De hecho, R y A son anillos graduados con grados significativos en S, en el siguiente sentido

$$R = \bigoplus_{m \in S} R_m, \quad \text{con} \quad R_m = Kt^m; \qquad A = \bigoplus_{m \in S} A_m$$

siendo A_m el espacio vectorial generado por los monomios $X_0^{\lambda_0} \dots X_g^{\lambda_g}$ con $\lambda_0 b_0 + \cdots + \lambda_g b_g = m$ y siendo ϕ_0 un homomorfismo de grado cero.

En 1991, Campillo & M. introducen objetos combinatorios (*complejos de Koszul*) asociados a las relaciones $m = \lambda_0 b_0 + \cdots + \lambda_g b_g$, con $\lambda_i \in \mathbb{N}$, para los elementos de S con el objeto de obtener información sobre S.

Las clases de semigrupos que consideraremos aquí reciben el nombre de sus clases de curvas asociadas.

Cualquier S verifica $m \in S \Longrightarrow c(S) - 1 - m \notin S$.

S es *simétrico* si $m \in S \Longleftrightarrow c(S) - 1 - m \notin S$.

Si S es simétrico, $c(S) = 2\delta(S)$
(Frőberg, Gotlieb & Hăggkvist 1997).

Los semigrupos simétricos son exactamente aquellos para los que la K-álgebra R es *Gorenstein* (Campillo & M. 1991).

Clases de semigrupos numéricos

S es *de intersección completa* si el anillo graduado $R = K[S]$ es de intersección completa, i.e. si el ideal $\ker \phi_0$ se puede generar por g elementos homogéneos.

En este caso, podemos escribir la curva monomial asociada $X_i = t^{b_i}$, $0 \leq i \leq g$, como una intersección de g hipersuperfícies de la forma $f_i(X_0, \ldots, X_g) = 0, 1 \leq i \leq g$.

Sean $N_i = e_{i-1}/e_i$, con $e_i = \mathrm{mcd}(b_0, ..., b_i)$, $i = 0, 1, ..., g$.
S es *libre* si $N_i b_i \in \langle b_0, \ldots, b_{i-1} \rangle, \;\; i = 1, \ldots, g$.

Herzog 1970 probó que libre implica simétrico.
También implica de intersección completa, ya que si $N_i b_i = \lambda_{i0} b_0 + \cdots + \lambda_{i,i-1} b_{i-1}$, con $\lambda_{ik} \in \mathbb{N}$, entonces $t^{N_i b_i} = t^{\lambda_{i0} b_0 + \cdots + \lambda_{i,i-1} b_{i-1}}$ y, a partir de $X_i = t^{b_i}$, las hipersuperfícies son
$f_i(X_0, \ldots, X_g) = X_i^{N_i} - X_0^{\lambda_{i0}} \cdots X_{i-1}^{\lambda_{i,i-1}} = 0$, $1 \leq i \leq g$.

Podemos obtener la curva monomial de las ecuaciones $f_i = 0$ recurrentemente desde $i = 1$ hasta $i = g$.

Clases de semigrupos numéricos

S es *de curva plana* si es libre y $N_i b_i < b_{i+1}, \;\; i = 1, \dots, g-1$.

A cada curva plana con representación paramétrica

$x = t^{c_0}, \; y = t^{c_1} + \cdots + t^{c_g}$, le asociamos el semigrupo

$S = \langle b_0, ..., b_g \rangle$ con $b_0 = c_0$, $b_1 = c_1$ y $b_{i+1} = c_{i+1} - c_i + N_i b_i$.

Si $S = \langle b_0, ..., b_g \rangle$ es de curva plana, entonces
$\mathrm{Ap}(S, b_0) = \{\mu_1 b_1 + \cdots + \mu_g b_g : \; 0 \leq \mu_k < N_k, 1 \leq k \leq g\}$
y los términos de Apéry solo son de esta forma.

Clases de semigrupos numéricos

En general:

$$\text{curva plana} \Longrightarrow \text{libre} \Longrightarrow \begin{cases} \text{intersección completa} \\ \text{simétrico} \end{cases}$$

Para $S = \langle b_0, b_1, b_2 \rangle$:

$$\text{curva plana} \Longrightarrow \text{libre} \Longrightarrow \text{intersección completa} \Longleftrightarrow \text{simétrico}$$

Para

$$S = \langle b_0, b_1 \rangle: \quad \begin{cases} S \text{ es de curva plana con} \\ \mathrm{Ap}(S, b_0) = \{0, b_1, 2b_1, \ldots, (b_0 - 1)b_1\} \text{ y} \\ c(S) = (b_0 - 1)(b_1 - 1) \end{cases}$$

L-formas asociadas a un 3-semigrupo numérico

Digrafo de doble lazo

Un *digrafo de doble lazo* $G = G(N; a, b)$, con $1 < a < b < N$ y $\mathrm{mcd}(a, b, N) = 1$, tiene

$$\begin{aligned} V(G) &= \mathbb{Z}_N = \{[0]_N, [1]_N, ..., [N-1]_N\}, \\ A(G) &= \{[i]_N \xrightarrow{a} [i+a]_N, [i]_N \xrightarrow{b} [i+b]_N : \ i = 0, ..., N-1\}. \end{aligned}$$

El peso de un camino en G es la suma de los pesos de sus arcos.

Un camino de $[i]_N$ a $[j]_N$ es mínimo si es de peso p_{ij} mínimo para todos los caminos de $[i]_N$ a $[j]_N$.

Este peso se conoce como la distancia $\mathrm{d_G}([i]_N, [j]_N) = p_{ij}$ en G.

Digrafo de doble lazo

Cada cuadrado unitario $[\![i,j]\!] := [i,i+1]\times[j,j+1]\in\mathbb{R}^2$, con $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$, se asocia al vértice $[ia+jb]_N$ del digrafo G alcanzado por un camino de longitud $ia+jb$ desde el vértice $[0]_N$.

El plano se ve teselado por baldosas en forma de L: $L(l,h,w,y)$.

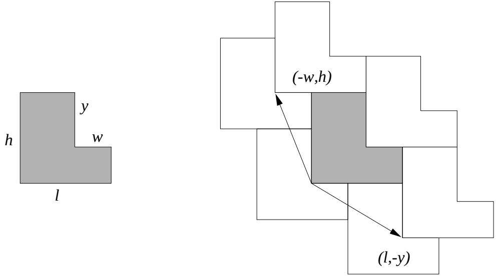


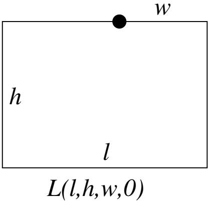
Diagrama de distancias mínimas

Cada L-forma $L(l, h, w, y)$ tiene $N = lh - wy$ cuadrados unitarios que representan los N vértices del grafo.

Diagrama de distancias mínimas

Cada L-forma $L(l, h, w, y)$ tiene $N = lh - wy$ cuadrados unitarios que representan los N vértices del grafo.

La L-forma $L(l, h, w, y)$ es *degenerada* (rectangular) si $wy = 0$.



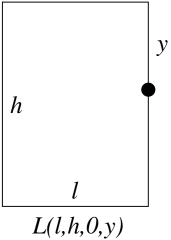


Diagrama de distancias mínimas

Cada L-forma $L(l, h, w, y)$ tiene $N = lh - wy$ cuadrados unitarios que representan los N vértices del grafo.

La L-forma $L(l, h, w, y)$ es *degenerada* (rectangular) si $wy = 0$.

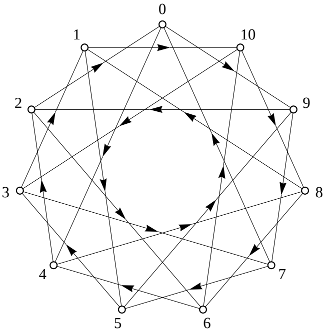
De todas las posibles teselaciones que podemos asociar al digrafo $G(N; a, b)$, nos interesan las que son *diagramas de distancias mínimas* (DDM), $\mathcal{H}$, i.e. si $[\![i, j]\!] \in \mathcal{H}$, entonces $\mathrm{d_G}([0]_N, [ia + jb]_N) = ia + jb$.

De este modo, $\{ia + jb : [\![i, j]\!] \in \mathcal{H}\} = \mathrm{Ap}(\langle a, b, N\rangle, N)$.

Definición: Una L-forma $\mathcal{H}$ está asociada a un semigrupo $S = \langle a, b, N\rangle$ si $\mathcal{H}$ es un DDM del digrafo $G(N; a, b)$.

Ejemplo DDM

Ejemplo $G(11;4,9)$: $\mathcal{H} = L(5,3,4,1)$



4	8	1	5	9	2	6	10	3	7
6	10	3	7	0	4	8	1	5	9
8	1	5	9	2	6	10	3	7	0
10	3	7	0	4	8	1	5	9	2
1	5	9	2	6	10	3	7	0	4
3	7	0	4	8	1	5	9	2	6
5	9	2	6	10	3	7	0	4	8
7	0	4	8	1	5	9	2	6	10
9	2	6	10	3	7	0	4	8	1
0	4	8	1	5	9	2	6	10	3

Cada cuadrado $[\![i,j]\!] \in \mathbb{N}^2$ tiene etiqueta $[4i+9j]_{11}$

L-forma asociada

Ejemplo: $S = \langle 4, 9, 11 \rangle$, $\mathcal{H} = L(5, 3, 4, 1)$

$\mathrm{Ap}(S, 11) = \{0, 4, 8, 9, 12, 13, 16, 17, 18, 21, 25\}$

45	49	53	57	61	65	69	73	77	81
36	40	44	48	52	56	60	64	68	72
27	31	35	39	43	47	51	55	59	63
18	22	26	30	34	38	42	46	50	54
9	13	17	21	25	29	33	37	41	45
0	4	8	12	16	20	24	28	32	36

Cada cuadrado $[\![i, j]\!] \in \mathbb{N}^2$ tiene etiqueta $4i + 9j$

Resultados Previos

Cada 3-semigrupo numérico tiene asociada al menos una L-forma (Rödseth 1978).

Teorema (A. & M. 2010) Sea $\mathcal{H} = L(l, h, w, y)$ asociada a $S = \langle a, b, N \rangle$. Se tiene

- Si $(la - yb)(hb - wa) > 0$, entonces $\mathcal{H}$ es la única L-forma asociada a S.
- Si $hb = wa$, entonces S también tiene asociada la L-forma

$$\mathcal{T}_1(\mathcal{H}) = \begin{cases} L(w, 2h - y, 2w - l, h) & l < 2w, \\ L(w, (\lfloor l/w \rfloor + 1)h - y, w - r, h) & l > 2w > 0, \\ & l = \lfloor l/w \rfloor w + r, \\ & 0 < r < w, \\ L(w, lh/w - y, 0, h) & l \geq 2w > 0, w \mid l. \end{cases}$$

- Si $la = yb$, entonces S también tiene asociada la L-forma

$$\mathcal{T}_2(\mathcal{H}) = \begin{cases} L(2l - w, y, l, 2y - h) & h < 2y, \\ L((\lfloor h/y \rfloor + 1)l - w, y, l, y - r) & h > 2y > 0, \\ & h = \lfloor h/y \rfloor y + r, \\ & 0 < r < y, \\ L(lh/y - w, y, l, 0) & h \geq 2y > 0, y \mid h. \end{cases}$$

- $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ y $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.
- $\mathcal{T}_1(\mathcal{H}) \neq \mathcal{H}$ y $\mathcal{T}_2(\mathcal{H}) \neq \mathcal{H}$.
- Si $(la - yb)(hb - wa) = 0$, entonces S tiene exactamente dos L-formas asociadas.

Teorema (A. & M. 2010): Sea $S = \langle a, b, N \rangle$ un 3-semigrupo y $\mathcal{H} = L(l, h, w, y)$ una L-forma asociada a S. Entonces

S es simétrico si, y solo si, $wy = 0$ o $(la - yb)(wa - hb) = 0$.

Clasificación de 3-semigrupos mediante L-formas

Clasificación

Vamos a clasificar los 3-semigrupos numéricos $S = \langle a, b, N \rangle$ asociados a curvas monomiales en términos del número y la degeneración o no de sus L-formas asociadas.

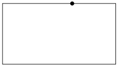
Esta clasificación depende de que $\{a, b, N\}$ sea o no un sistema mínimo de generadores de S.

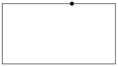
Como $1 < a < b < N$, $\mathrm{mcd}(a, b, N) = 1$, distinguimos dos casos:

- $\{a, b, N\}$ no es un sistema mínimo de generadores. En este caso $\mathrm{mcd}(a, b) \in \{1, a\}$.
- El sistema $\{a, b, N\}$ es mínimo.

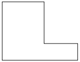
Sistema de generadores no mínimo

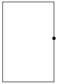
Teorema 1: $S=\langle a,b,N\rangle$, con $1<a<b<N$, $\mathrm{mcd}(a,b)=1$, $N=\lambda a+\mu b$ con $\lambda,\mu\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Entonces

(a.1) $N=\lambda a$, $\lambda\le b$: $\exists r$, $0\le r<\lambda$, $r\equiv -b (\text{mód } \lambda)$, entonces existe una única $L(\lambda,a,\lambda-r,0)$ 

(a.2) $N=\lambda a$, $\lambda>b$: entonces $\mathcal{H}=L(\lambda,a,b,0)$  y

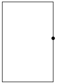
$\mathcal{T}_1(\mathcal{H}) =$

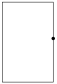
 $b\nmid\lambda$

 $b\mid\lambda$

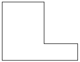
Clasificación: $\mathrm{mcd}(a,b)=1$ y $N \in \langle a,b \rangle$

(b.1) $N = \mu b$, $\mu \leq a$: $\exists r$, $0 \leq r < \mu$, $r \equiv -a (\text{mód } \mu)$, entonces

existe una única $L(b, \mu, 0, \mu - r)$ 

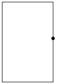
(b.2) $N = \mu b$, $\mu > a$: entonces $\mathcal{H} = L(b, \mu, 0, a)$  y

$\mathcal{T}_2(\mathcal{H}) =$

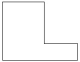
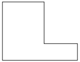
 $a \nmid \mu$

 $a \mid \mu$

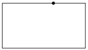
(c) $N=\lambda a=\mu b>ab$ si, y solo si, S tiene asociadas

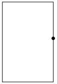
$\mathcal{H}=L(\lambda,a,b,0)$  y $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})=L(b,\mu,0,a)$ 

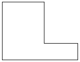
(d) $N=\lambda a+\mu b$, $a,b\nmid N$: $\Longrightarrow N=\lambda' a+\mu' b$ con $1\leq\mu'<a$,

entonces $\mathcal{H}=L(\lambda'+b,a,b,a-\mu')$  y $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})$ 

Teorema 2: $S=\langle a,b,N\rangle$, $1<a<b<N$, $\mathrm{mcd}(a,b,N)=1$ y $b=ka$. Entonces

(a) S tiene asociadas dos L-formas y al menos una es de la forma $\mathcal{H}=L(N,1,k,0)$ 

(b) S tiene asociadas dos L-formas degeneradas si, y solo si, $k \mid N$. Éstas son $\mathcal{H}$ y $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})=L(k,N/k,0,1)$ 

(c) Si $k \nmid N$, las L-formas son $\mathcal{H}$ y $\mathcal{T}_1(\mathcal{H})=L(k,\lfloor N/k\rfloor+1,k-r,1)$  con $N=\lfloor N/k\rfloor k+r$ y $0<r<k$.

Sistema mínimo de generadores

N solo puede tomar valores en el conjunto de lagunas del semigrupo $S' = \langle a,b\rangle$.

En particular, $b < N < (a-1)(b-1)$.

Teorema 3: $S = \langle a,b,N\rangle$, $1 < a < b < N$, $\mathrm{mcd}(a,b)=1$, $N \notin \langle a,b\rangle$:

(a) S no es simétrico si, y solo si, tiene asociada una única L-forma no degenerada.

(b) S es simétrico si, y solo si, tiene asociada una única L-forma degenerada.

(c) S no es libre.

Lema: $S = \langle a, b, N\rangle$ mínimamente generado, $1 < a < b < N$ y $\mathrm{mcd}(a,b) = p > 1$.
Sean $S_p = \langle a/p, b/p\rangle$ y $S' = \langle a/p, b/p, N\rangle$.
Entonces,

(a) S es simétrico si, y solo si, S' es simétrico.
(Frőberg, Gotlieb & Hắggkvist, 1987).

(b) S libre si, y solo si, $N \in S_p$.

(c) S de curva plana si, y solo si, $N \in S_p$ y $N > \mathrm{mcm}(a,b)$.

Teorema 4: $S = \langle a, b, N\rangle$ mínimamente generado,
$1 < a < b < N$ y $\operatorname{mcd}(a, b) = p > 1$.
Sean $S_p = \langle a/p, b/p\rangle$ y $S' = \langle a/p, b/p, N\rangle$.
Entonces

(a) S no simétrico si, y solo si, S' tiene asociada una única L-forma no degenerada.

(b) S simétrico no libre si, y solo si, S' tiene asociada una única L-forma degenerada.

(c) S libre si, y solo si, las L-formas asociadas a S' se rigen por el Teorema 1.

(d) S de curva plana si, y solo si, S es libre y para cualquier L-forma, $L(l, h, w, y)$, asociada a S' se cumple $(l - w)a + (h - y)b > \operatorname{mcm}(a, b)$.

¡Gracias!
por vuestra atención