Familias infinitas de digrafos de Cayley de grado 2 óptimos sobre grupos abelianos finitos

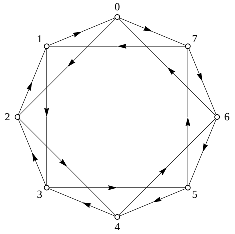
Alícia Miralles
en colaboración con
Francesc Aguiló

Universitat Politècnica de Catalunya DMA4

VIII Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica
Almería

Digrafo de Cayley, $\mathrm{Cay}(\boldsymbol{G}_N, \{f, g\})$

$\boldsymbol{G}_N$ es un grupo abeliano finito de orden N
generado por dos elementos $\langle f, g\rangle = \boldsymbol{G}_N$
$V = \boldsymbol{G}_N$, $A = \{u \to u + f, u \to u + g : \ u \in \boldsymbol{G}_N\}$, f,g pasos



$\boldsymbol{G}_8 = \mathbb{Z}_8 = \langle 2, 7\rangle$

Vértice simétricos, regulares y fuertemente conexos

- Modelización de redes de interconexión de área local si $\boldsymbol{G}_N$ cíclico, $\boldsymbol{G}_N = \mathbb{Z}_N$
- El caso particular $\mathbb{Z}_N$ con $\langle 1, g\rangle = \mathbb{Z}_N$ ha sido ampliamente estudiado
- Estudio del diámetro óptimo $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{f, g\})$
- Wong y Coppersmith (1974), dieron una cota inferior ajustada del diámetro óptimo

$$\mathrm{lb}(N) = \lceil \sqrt{3N} \rceil - 2$$

Fijado un valor N nos planteamos obtener los diámetros óptimos de $\mathrm{Cay}(\boldsymbol{G}_N, \{f, g\})$, sin la restricción a $\boldsymbol{G}_N$ cíclico

Fijado $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_C(N) &= \min\{\mathrm{D}(\boldsymbol{G}_N, \{f, g\}) : \boldsymbol{G}_N \text{ cíclico}, \langle f, g\rangle = \boldsymbol{G}_N\}, \\ \mathrm{D}_{NC}(N) &= \min\{\mathrm{D}(\boldsymbol{G}_N, \{f, g\}) : \boldsymbol{G}_N \text{ no cíclico}, \langle f, g\rangle = \boldsymbol{G}_N\} \end{aligned}$$

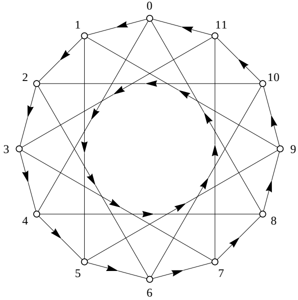
N *es* *cc* *(cíclico Cayley)* si $\mathrm{D}_C(N) < \mathrm{D}_{NC}(N)$

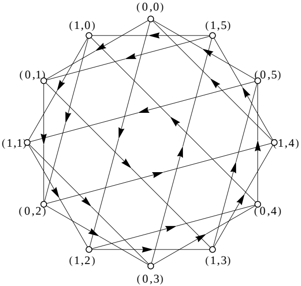
N *es* *ncc* *(no cíclico Cayley)* si $\mathrm{D}_{NC}(N) < \mathrm{D}_C(N)$

N *es* *ac* *(ajustado Cayley)* si $\mathrm{D}_{NC}(N) = \mathrm{D}_C(N)$

$$\mathrm{D}(N) = \min\{\mathrm{D}_C(N), \mathrm{D}_{NC}(N)\} \geq \mathrm{lb}(N) = \left\lceil \sqrt{3N} \right\rceil - 2$$

$\mathrm{D}_C(12) = \mathrm{D}(\mathbb{Z}_{12}, \{1,4\}) = 5$ $\quad 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 7 \to 11$

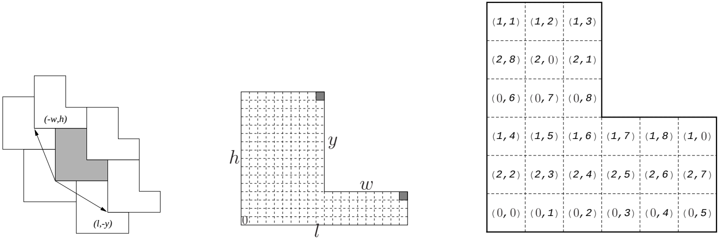




$\mathrm{D}_{NC}(12) = \mathrm{D}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \{(0,1),(1,2)\}) = \mathrm{lb}(12) = 4$
$(0,0) \to (0,1) \to (0,2) \to (0,3) \to (1,5)$

$N = 12$ es ncc y $\mathrm{D}(N) = 4$

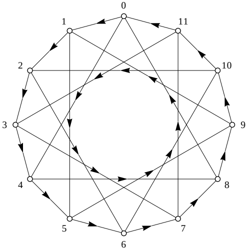
El diagrama DDM asociado a un digrafo $\mathrm{Cay}(\boldsymbol{G}_N, \{f, g\})$, tiene forma de L, área N y contienen las propiedades métricas del mismo. Cada $g \in \boldsymbol{G}_N$ se identifica con un cuadrado unitario.

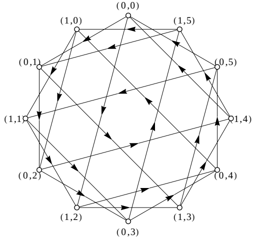


Teselación, $\mathcal{L} = L(l, h, w, y)$ genérica y $L(6, 6, 3, 3)$ asociada a $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9, \{(0, 1), (2, 2)\})$

$\mathrm{D}_C(12) = \mathrm{D}(\mathbb{Z}_{12}, \{1,4\}) = 5$ $\qquad$ $\mathrm{D}_{NC}(12) = \mathrm{D}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \{(0,1),(1,2)\}) = 4$

A partir de $\mathcal{H} = L(l,h,w,y)$, el diámetro es: $l + h - \min\{w,y\} - 2$





0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2
8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2	3	4	5	6
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	0	1	2

(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(0,4)	(0,5)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,0)
(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,4)	(1,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,0)
(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)
(0,4)	(0,5)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,0)
(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,0)	(0,1)	(0,2)

A partir de un DDM $\mathcal{H} = L(l,h,w,y)$, consideramos $M(l,h,w,y) = \begin{pmatrix} l & -w \\ -y & h \end{pmatrix}$ y su *Forma Normal de Smith* $S = \mathsf{diag}(s_1, s_2) = UM(l,h,w,y)V$ con $s_1 = \mathrm{mcd}(l,h,w,y)$, $s_1 \mid s_2$, $s_1 s_2 = N$ y $U, V \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ unimodulares. Entonces $\mathcal{H}$ está asociado a $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{s_1} \times \mathbb{Z}_{s_2}, \{(U_{11}, U_{21}), (U_{12}, U_{22})\})$.

Si $L(l,h,w,y)$ está asociada a $\mathrm{Cay}(\boldsymbol{G}_N, \{a,b\})$, entonces $\boldsymbol{G}_N$ es cíclico si, y solo si, $\mathrm{mcd}(l,h,w,y) = 1$.

Decimos que un DDM $\mathcal{H}_0 = L(l,h,w,y)$ de área N, es

- *k-tight* si $\mathrm{d}_{\mathcal{H}_0} = \mathrm{lb}(N) + k$;
- Llamamos *órbita* de $\mathcal{H}_0$, $\mathrm{orb}(\mathcal{H}_0)$, a la familia de L-formas $\mathcal{H}_x = L(l+2x, h+2x, w+x, y+x)$, $x \in \mathbb{N}$.
- Decimos que $\mathcal{H}_0$ es *procreadora* k-tight cuando todas las L-formas de $\mathrm{orb}(\mathcal{H}_0)$ también lo son

En el trabajo de A.,Fiol (1995), se da un teorema que clasifica todos los DDM con N fijado. La clasificación queda resumida en unas tablas según las L-formas sean procreadoras o no (excepciones).
Se utiliza la siguiente partición de los números naturales, $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \bigcup_{x=0}^{\infty} [3x^2+1, 3(x+1)^2]$. Así, si $N \in [3x^2+1, 3(x+1)^2]$, tenemos

$$\mathrm{lb}(N) = \begin{cases} 3x-1 & \text{if } N \in I_1(x) = [3x^2+1, 3x^2+2x], \\ 3x & \text{if } N \in I_2(x) = [3x^2+2x+1, 3x^2+3x+1], \\ 3x+1 & \text{if } N \in I_3(x) = [3x^2+3x+2, 3(x+1)^2]. \end{cases}$$

a) $\mathrm{D}_C(27)$?, b)$\mathrm{D}_{NC}(27)$? y $N = 27$ es cc, ncc o ac?

a) $\mathrm{D}_C(27)$? Buscamos un DDM con diámetro mínimo que verifique $\mathrm{mcd}(l, h, w, y) = 1$.

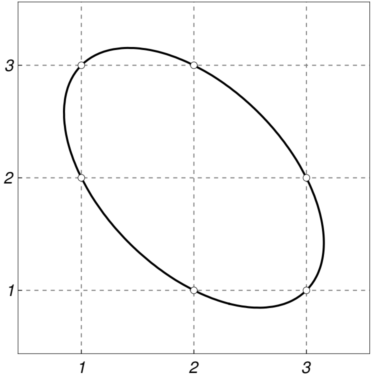
- Clasificamos $N = 27$, $27 \in I_3(2) = [21, 27]$, con $x = 2$ y $i = 3$
- Exploramos en la tabla a partir de $k = 0$ las L-formas de área 27 en el conjunto $P[3,3](0) \cup P[3,2](0) \cup P[3,1](0)$. ▸ tablag
- Para $P[3,3](0)$ tenemos que resolver $ab - (a + b - 3)^2 = 3$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Obtenemos la solución única $(a, b) = (2, 2)$, que nos determina las dimensiones del DDM (en la misma fila de la tabla), $L(6, 6, 3, 3)$.
- Como $\mathrm{mcd}(6, 6, 3, 3) = 3 \neq 1$, el grupo asociado no es cíclico y pasamos a analizar la siguiente familia.

  Analizaríamos las otras posibilidades, las familia $E_1(0)$ y $E_2[3](0)$ no contiene ningún DDM con $N = 27$ para $k = 0$.

▸ tabla

Para $k = 1$, analizando la familia $P[3,3](1)$, obtenemos la ecuación $ab - (a+b-4)(a+b-2) = 3$. Seis soluciones enteras, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$, $(2,3)$, $(3,1)$ y $(3,2)$

La solución $(1,2)$ nos determina la L-forma $\mathcal{H}_{27} = L(5,6,1,3)$.



Obtenemos el digrafo

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_{27}, \{(-1,3),(-2,5)\}) \cong \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{27}, \{3,5\})$ y, por tanto,

$\mathrm{D}_C(27) = \mathrm{D}(\mathbb{Z}_{27}, \{3,5\}) = \mathrm{d}_{\mathcal{H}_{27}}(5,6,1,3) = 8.$

b)$\mathrm{D}_{NC}(27)$?

- Procederíamos de la misma forma, exigiendo ahora que $\mathrm{mcd}(h,l,w,y) > 1$ (condición para grupos no cíclicos).
- En el proceso anterior, al analizar la familia $P[3,3](0)$, hemos hallado la L-forma $\mathcal{H}'_{27} = L(6,6,3,3)$ con $\mathrm{mcd}(h,l,w,y) > 1$.
- Obtenemos el digrafo $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9, \{(0,1),(-1,2)\})$ con $\mathrm{D}_{NC}(27) = \mathrm{D}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9, \{(0,1),(-1,2)\}) = \mathrm{d}_{\mathcal{H}'_{27}}(6,6,3,3) = 7$.
- 27 es ncc, ya que $\mathrm{D}_{NC}(27) < \mathrm{D}_C(27)$.

Teorema

Los naturales $N_m = 12m^2 + 20m + 8$, con $m \geq 0$, son cc y

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_C(N_m) &= \mathrm{D}(\mathbb{Z}_{N_m}, \{12m^2 + 14m + 3, 1\}) = \mathrm{lb}(N_m) = 6m + 3, \\
\mathrm{D}_{NC}(N_m) &= \mathrm{D}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6m^2+10m+4}, \{(1, 12m^2 + 17m + 5), (0, 1)\}) \\
&= 6m + 4.
\end{aligned}$$

- Mediante exploraciones numéricas, filtradas varias veces para ordenar la información.
- A través de estos filtros se han obtenido expresiones candidatas aunque muchas de ellas se han tenido que desechar.

Teorema

Los naturales $N_m = 108m^2 + 72m + 9$, para $m \geq 0$, son ac con

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_C(N_m) &= \mathrm{D}(\mathbb{Z}_{N_m}, \{72m^2 + 54m + 8, 1\}) = \mathrm{lb}(N_m) = 18m + 4, \\ \mathrm{D}_{NC}(N_m) &= \mathrm{D}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{36m^2+24m+3}, \{(1, 30m^2 + 24m + 1), (0, 1)\}) \\ &= 18m + 4. \end{aligned}$$

Teorema

Los valores $N_m = 3(m+1)^2$, para $m \geq 1$, son ncc. Además

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_C(N_m) &= \mathrm{D}(\mathbb{Z}_{N_m}, \{m + 1, 2m + 1\}) = \mathrm{lb}(N_m) + 1 = 3m + 2, \\ \mathrm{D}_{NC}(N_m) &= \mathrm{D}(\mathbb{Z}_{m+1} \times \mathbb{Z}_{3(m+1)}, \{(1, N_m - 1), (0, 1)\}) = \mathrm{lb}(N_m) \\ &= 3m + 1. \end{aligned}$$

Familia	N	w	y
$\mathcal{H}$ de área N en $I_1(x) = [3x^2+1, 3x^2+2x]$ y diámetro $d_{\mathcal{H}} = 3x+k-1$			
$P[1,1](k)$	$3x^2 + B_{1,1}$ $B_{1,1} = ab - (a+b-k-1)(a+b+k+1)$ $B_{1,1} \geq 1,\ x \geq \lceil B_{1,1}/2 \rceil$	$x+a+b-k-1$	$x+a+b+k+1$
$P[1,2](k)$	$3x^2 + x + B_{1,2}$ $B_{1,2} = ab - (a+b-k-1)(a+b+k)$ $x \geq max\{1-B_{1,2}, B_{1,2}\}$	$x+a+b-k-1$	$x+a+b+k$
$P[1,3](k)$	$3x^2 + 2x + B_{1,3}$ $B_{1,3} = ab - (a+b-k-1)(a+b+k-1)$ $B_{1,3} \leq 0,\ x \geq \lceil (1-B_{1,3})/2 \rceil$	$x+a+b-k-1$	$x+a+b+k-1$
$\mathcal{H}$ de área N en $I_2(x) = [3x^2+2x+1, 3x^2+4x+1]$ y diámetro $d_{\mathcal{H}} = 3x+k$			
$P[2,1](k)$	$3x^2 + 2x + B_{2,1}$ $B_{2,1} = ab - (a+b-k-2)(a+b+k)$ $B_{2,1} \geq 1,\ x \geq \lceil (B_{2,1}-1)/2 \rceil$	$x+a+b-k-2$	$x+a+b+k$
$P[2,2](k)$	$3x^2 + 3x + B_{2,2}$ $B_{2,2} = ab - (a+b-k-2)(a+b+k-1)$ $x \geq \lvert 1-B_{2,2} \rvert$	$x+a+b-k-2$	$x+a+b+k-1$
$P[2,3](k)$	$3x^2 + 4x + B_{2,3}$ $B_{2,3} = ab - (a+b-k-2)(a+b+k-2)$ $B_{2,3} \leq 1,\ x \geq \lceil (1-B_{2,3})/2 \rceil$	$x+a+b-k-2$	$x+a+b+k-2$
$\mathcal{H}$ de área $x=2$ y $N=27$ en $I_3(2) = [20, 27]$ y diámetro $d_{\mathcal{H}} = 7+k$			
$P[3,1](k)$	$3x^2 + 4x + B_{3,1}$ $B_{3,1} = ab - (a+b-k-3)(a+b+k-1)$ $B_{3,1} \geq 2,\ x \geq \lceil (B_{3,1}-3)/2 \rceil$	$x+a+b-k-3$	$x+a+b+k-1$
$P[3,2](k)$	$3x^2 + 5x + B_{3,2}$ $B_{3,2} = ab - (a+b-k-3)(a+b+k-2)$ $x \geq max\{2-B_{3,2}, B_{3,2}-3\}$	$x+a+b-k-3$	$x+a+b+k-2$
$P[3,3](k)$	$24 + B_{3,3} = 27$ $B_{3,3} = 3 = ab - (a+b-k-3)(a+b+k-3)$ $B_{3,3} \leq 3,\ 2 \geq \lceil (2-B_{3,3})/2 \rceil$	$a+b-k-1$	$a+b+k-1$

ejemplotabla Parametrización de las L-formas procreadoras k-tight $P(k)$

Familia	N	w	y
$\mathcal{H}$ de área N en $I_1(x) = [3x^2+1, 3x^2+2x]$ y diámetro $d_{\mathcal{H}} = 3x+k-1$			
$P[1,1](k)$	$3x^2 + B_{1,1}$ $B_{1,1} = ab - (a+b-k-1)(a+b+k+1)$ $B_{1,1} \geq 1,\ x \geq \lceil B_{1,1}/2 \rceil$	$x+a+b-k-1$	$x+a+b+k+1$
$P[1,2](k)$	$3x^2 + x + B_{1,2}$ $B_{1,2} = ab - (a+b-k-1)(a+b+k)$ $x \geq max\{1 - B_{1,2}, B_{1,2}\}$	$x+a+b-k-1$	$x+a+b+k$
$P[1,3](k)$	$3x^2 + 2x + B_{1,3}$ $B_{1,3} = ab - (a+b-k-1)(a+b+k-1)$ $B_{1,3} \leq 0,\ x \geq \lceil (1 - B_{1,3})/2 \rceil$	$x+a+b-k-1$	$x+a+b+k-1$
$\mathcal{H}$ de área N en $I_2(x) = [3x^2+2x+1, 3x^2+4x+1]$ y diámetro $d_{\mathcal{H}} = 3x+k$			
$P[2,1](k)$	$3x^2 + 2x + B_{2,1}$ $B_{2,1} = ab - (a+b-k-2)(a+b+k)$ $B_{2,1} \geq 1,\ x \geq \lceil (B_{2,1} - 1)/2 \rceil$	$x+a+b-k-2$	$x+a+b+k$
$P[2,2](k)$	$3x^2 + 3x + B_{2,2}$ $B_{2,2} = ab - (a+b-k-2)(a+b+k-1)$ $x \geq \lvert 1 - B_{2,2} \rvert$	$x+a+b-k-2$	$x+a+b+k-1$
$P[2,3](k)$	$3x^2 + 4x + B_{2,3}$ $B_{2,3} = ab - (a+b-k-2)(a+b+k-2)$ $B_{2,3} \leq 1,\ x \geq \lceil (1 - B_{2,3})/2 \rceil$	$x+a+b-k-2$	$x+a+b+k-2$
$\mathcal{H}$ de área N en $I_3(x) = [3x^2+4x+2, 3x^2+6x+3]$ y diámetro $d_{\mathcal{H}} = 3x+k+1$			
$P[3,1](k)$	$3x^2 + 4x + B_{3,1}$ $B_{3,1} = ab - (a+b-k-3)(a+b+k-1)$ $B_{3,1} \geq 2,\ x \geq \lceil (B_{3,1} - 3)/2 \rceil$	$x+a+b-k-3$	$x+a+b+k-1$
$P[3,2](k)$	$3x^2 + 5x + B_{3,2}$ $B_{3,2} = ab - (a+b-k-3)(a+b+k-2)$ $x \geq max\{2 - B_{3,2}, B_{3,2} - 3\}$	$x+a+b-k-3$	$x+a+b+k-2$
$P[3,3](k)$	$3x^2 + 6x + B_{3,3}$ $B_{3,3} = ab - (a+b-k-3)(a+b+k-3)$ $B_{3,3} \leq 3,\ x \geq \lceil (2 - B_{3,3})/2 \rceil$	$x+a+b-k-3$	$x+a+b+k-3$

ejemplotabla