Sobre el número de Ramsey $R(K_4\text{-e},K_7)$

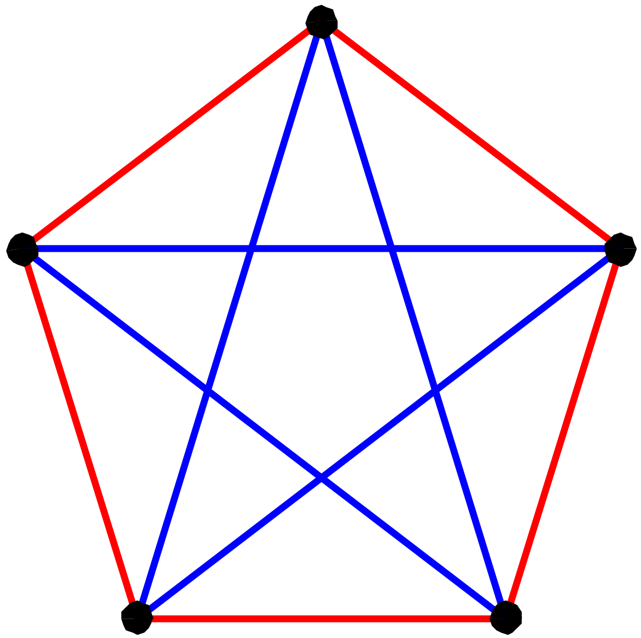
Luis Boza
José Ramón Portillo
Dto. Matemática Aplicada I
Universidad de Sevilla

Resultado principal

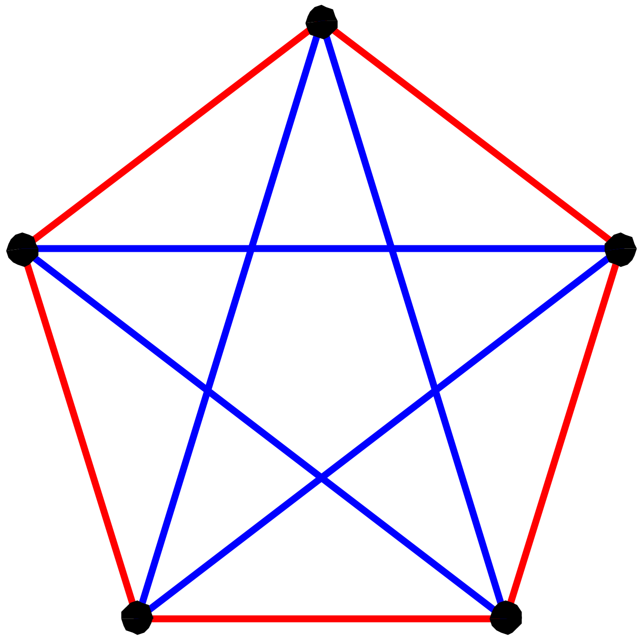
$$R(J_4,K_7)\leq 30$$

Dados dos grafos G_1 y G_2, el número de Ramsey $R(G_1,G_2)$ es el menor número natural tal que todo grafo con ese número de vértices o bien contiene a G_1 o bien su complementario contiene a G_2.

Dados dos grafos G_1 y G_2, el número de Ramsey $R(G_1,G_2)$ es el menor número natural tal que cualquier coloración con colores azul y rojo de las aristas del grafo completo con ese número de vértices o bien contiene un G_1 de color azul o bien contiene un G_2 de color rojo.



$$R(K_3,K_3)\geq 6$$



$R(K_3,K_3)\geq 6$

$$R(G_1,G_2)\leq R(G_1\text{-}u,G_2)+R(G_1,G_2\text{-}v)$$

$$R(K_3,K_3)\leq R(K_2,K_3)+R(K_3,K_2)=6$$

K_n es el grafo completo de n vértices.

K_n es el grafo completo de n vértices.

K_n-e ó J_n es el grafo completo de n vértices menos una arista.

K_n es el grafo completo de n vértices.

K_n-e ó J_n es el grafo completo de n vértices menos una arista.

¿$R(J_m, J_n)$, $R(J_m, K_n)$?

Antecedentes históricos

Valores exactos

$$R(J_2,G)=\text{mín}\{n(G),2\}$$

$$R(J_3,K_n)= R(J_3,J_{n+1})=2n\text{-}1$$

1972.- Chvátal y Harary:

$R(J_4,K_3)=7$

$R(J_4,J_4)=10$

$R(J_4,K_4)=11$

1977.- Clancy: $R(J_5,K_3)=11$

1981.- Bolze y Harborth: $R(J_4,K_5)=16$

1982.- Grenda y Harborth: $R(J_7,K_3)=21$

1985.- Faudree, Rousseau y Schelp:

$$R(J_4,J_5)=13$$

$$R(J_6,K_3)=17$$

1988.- Exoo, Harborth y Mengersen:

$$R(J_5,K_4)=19$$

1989.- Clapham, Exoo, Harborth, Mengersen y Sheehan:

$$R(J_5,J_5)=22$$

1990.- Radziszowski:

$$R(J_8,K_3)=25$$

$$R(J_9,K_3)=31$$

1991.- McNamara y Radziszowski:

$$R(J_4,J_7)=28$$

1995.- McNamara: $R(J_4,K_6)=21$

2000.- Exoo: $R(J_4,J_6)=17$

Casos abiertos

$¿R(J_5,K_5)?$

$¿R(J_6,K_4)?$

$¿R(J_{10},K_3)?$

$¿R(J_4,K_7)?$

1990.- Exoo

$$30 \leq R(J_5, K_5)$$

1990.- Exoo

1992.- Exoo

$$30 \leq R(J_5, K_5) \leq 34$$

1997.- Exoo

$$27 \leq R(J_6, K_4)$$

2012.- Boza

$$30 \leq R(J_6, K_4)$$

2012.- Boza

2010.- Boza

$$30 \leq R(J_6, K_4) \leq 35$$

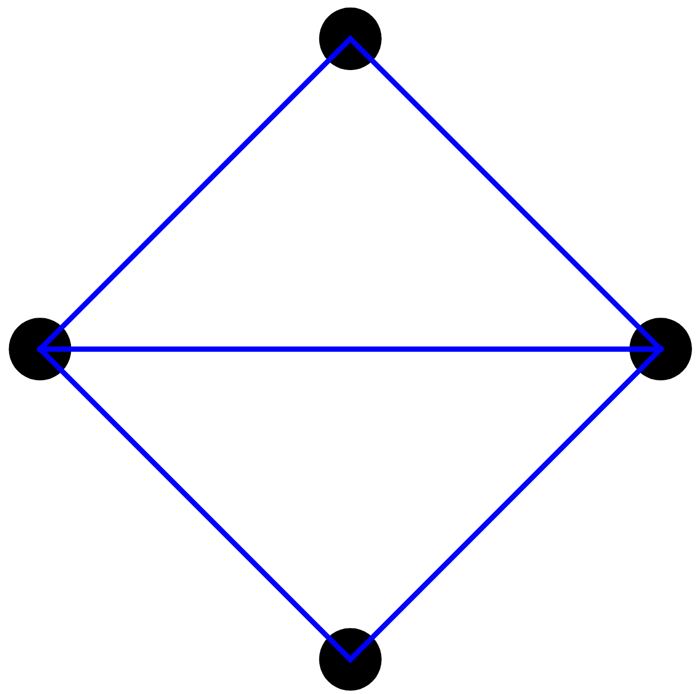
2004.- McKay, Piwakowski y Radziszowski

$$37 \leq R(J_{10}, K_3)$$

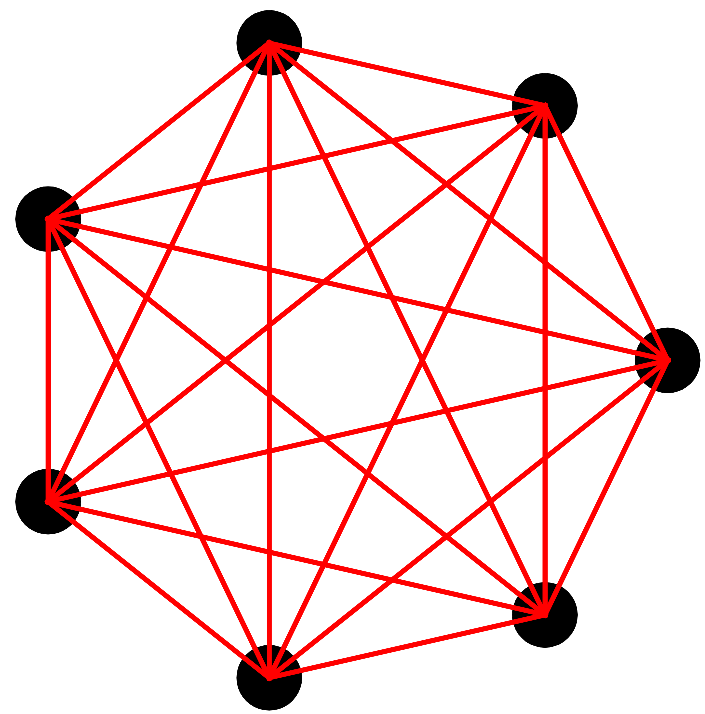
2004.- McKay, Piwakowski y Radziszowski

$$37 \leq R(J_{10},K_3) \leq 38$$

¿$R(J_4, K_7)$?



J_4



K_7

1991.- McNamara y Radziszowski: $R(J_4,J_7)=28$

$$28 \leq R(J_4,K_7)$$

1991.- McNamara y Radziszowski: $R(J_4,J_7)=28$

$$28 \leq R(J_4,K_7) \leq 34$$

1995.- McNamara: $R(J_4,K_6)=21$

$R(J_3,K_7)=13$

$$R(G_1,G_2) \leq R(G_1-u,G_2) + R(G_1,G_2-v)$$

1991.- McNamara y Radziszowski: $R(J_4,J_7)=28$

$$28 \leq R(J_4,K_7) \leq 31$$

2010.- Boza

Resultado principal

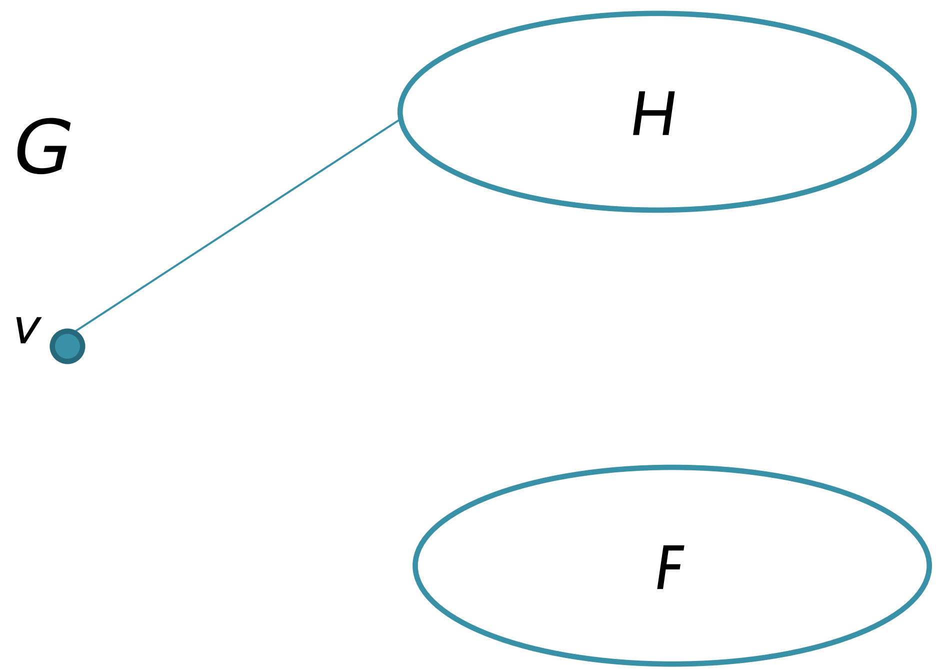
$$R(J_4,K_7)\leq 30$$

Prueba del resultado principal

Sea G un grafo con 30 vértices que no contiene a J_4 y que su complementario no contiene a K_7.

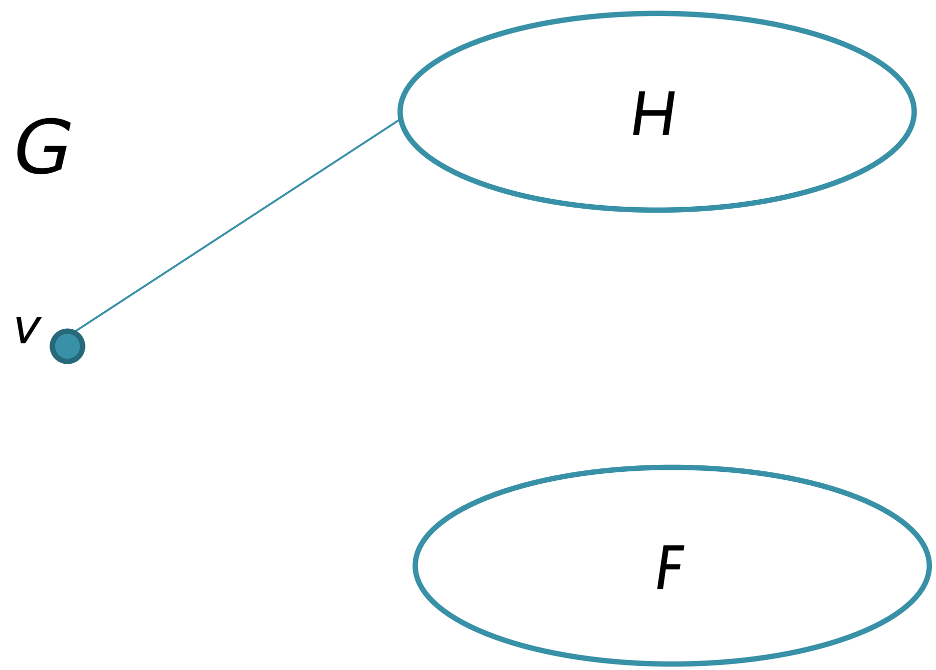
Prueba del resultado principal

Sea G un grafo con 30 vértices que no contiene a J_4 y que su complementario no contiene a K_7.



Prueba del resultado principal

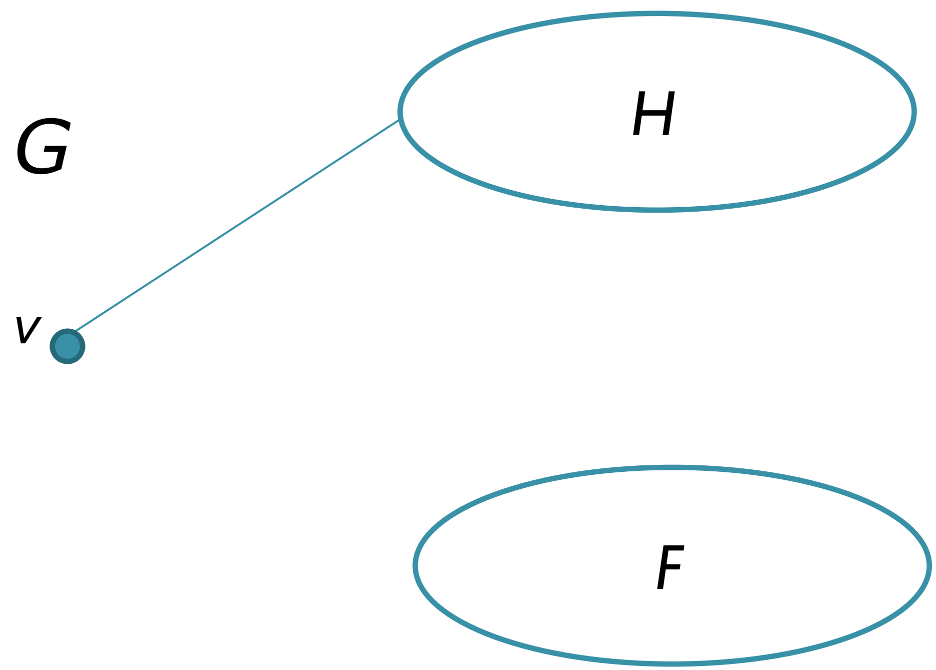
H no contiene a J_3 y su complementario no contiene a K_7.



Prueba del resultado principal

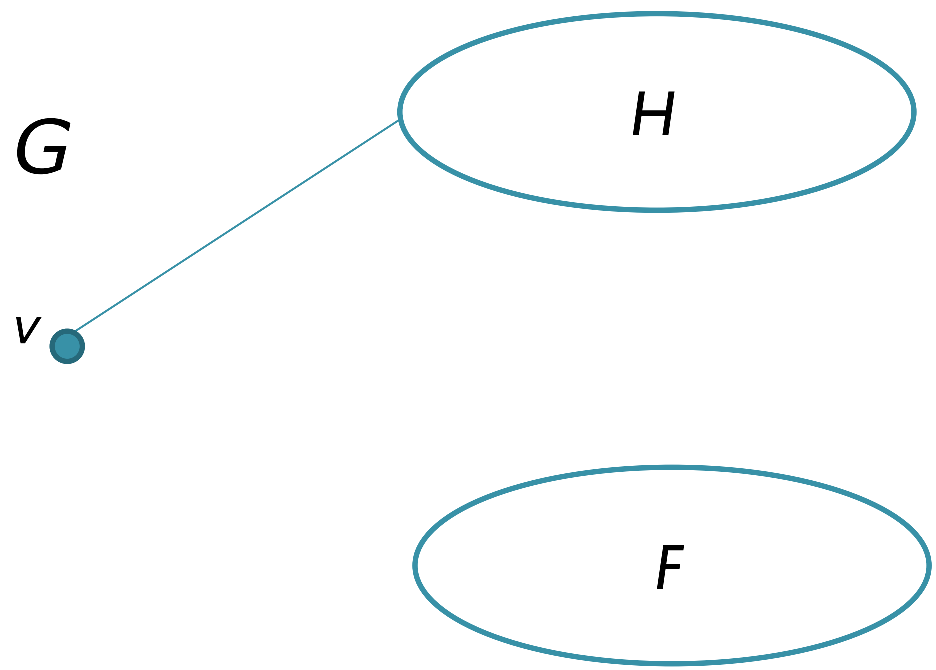
H no contiene a J_3 y su complementario no contiene a K_7.

F no contiene a J_4 y su complementario no contiene a K_6.



Prueba del resultado principal

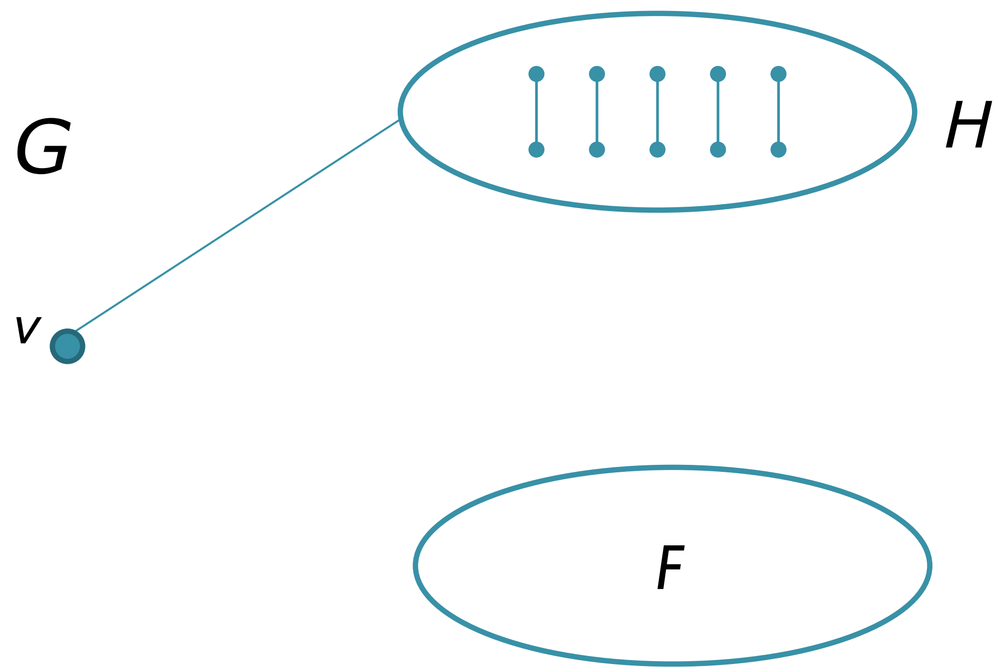
Las valencias de los vértices de *G* son 9 ó 10.



Prueba del resultado principal

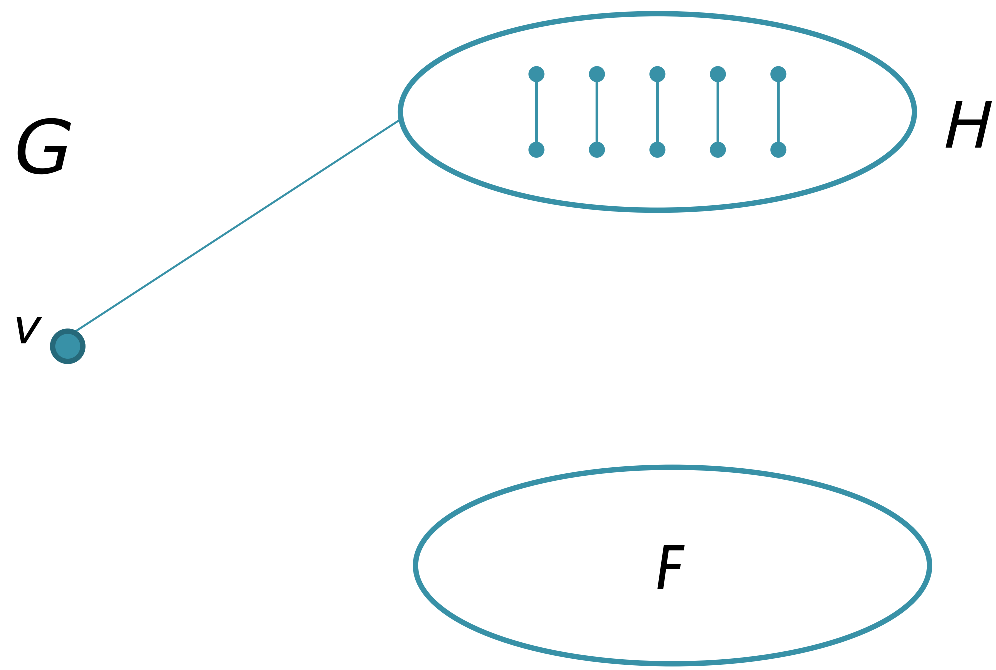
Las valencias de los vértices de G son 9 ó 10.

Si v tiene valencia 10 entonces H está formado por 5 aristas disjuntas y F tiene 19 vértices.



Prueba del resultado principal

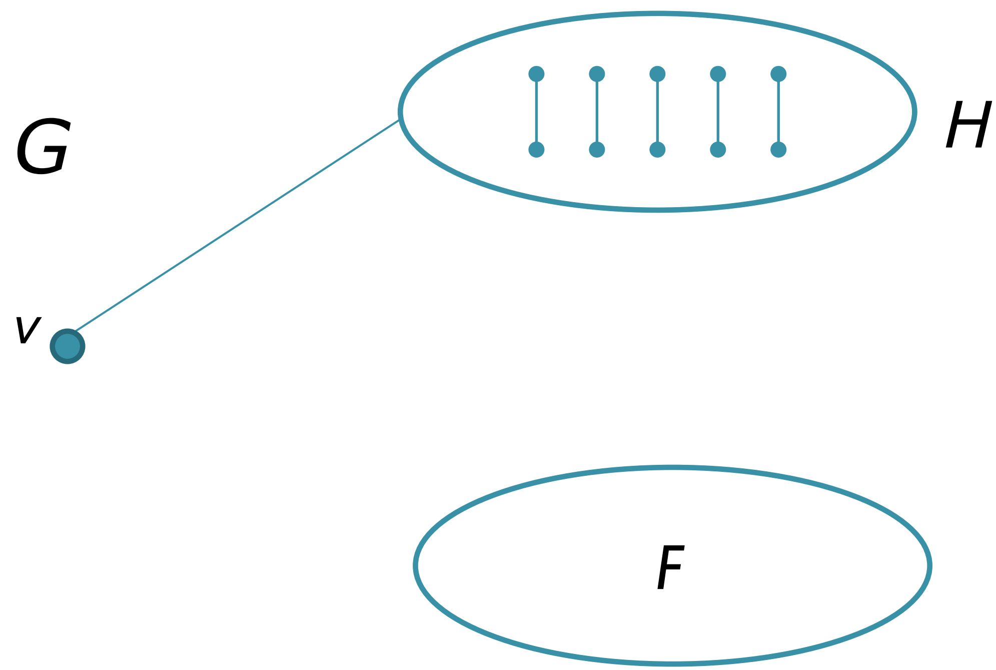
Si todos los vértices de G tienen valencia 10 entonces F tiene 55 aristas.



Prueba del resultado principal

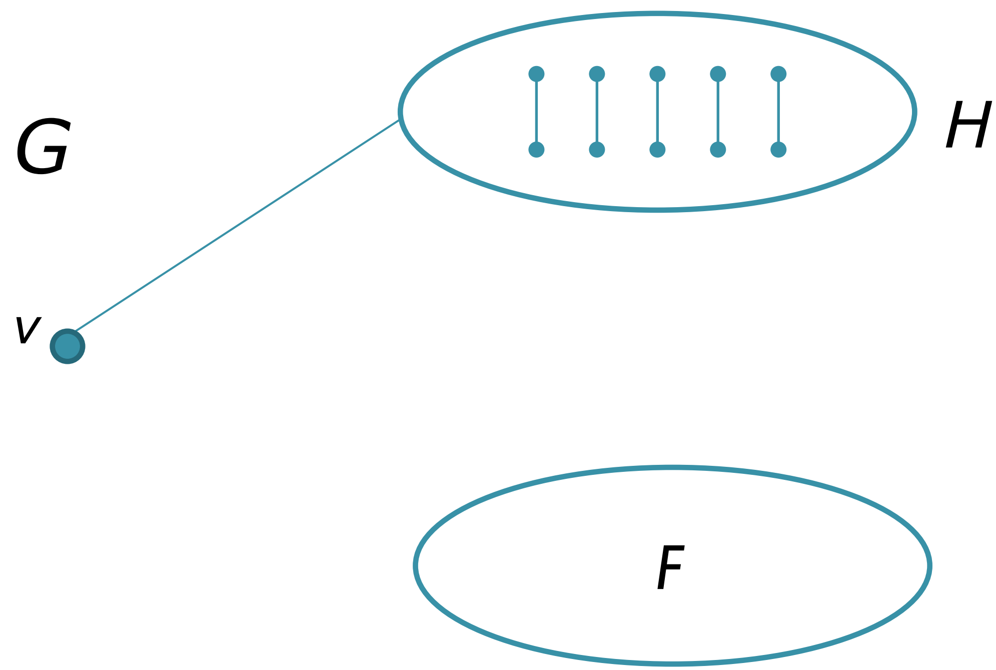
Si todos los vértices de G tienen valencia 10 entonces F tiene 55 aristas.

Radziszowski, Shetler y Wurtz encontraron los 16475 grafos de 19 vértices y 55 aristas que no contienen a J_4 y que su complementario no contiene a K_6.



Prueba del resultado principal

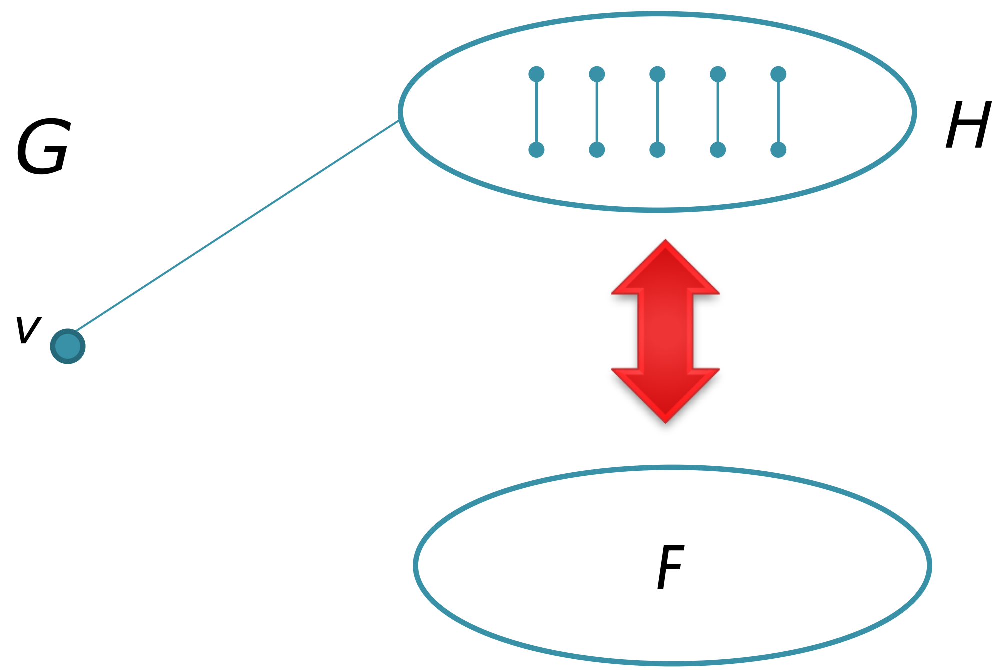
F es uno de esos 16475 grafos.



Prueba del resultado principal

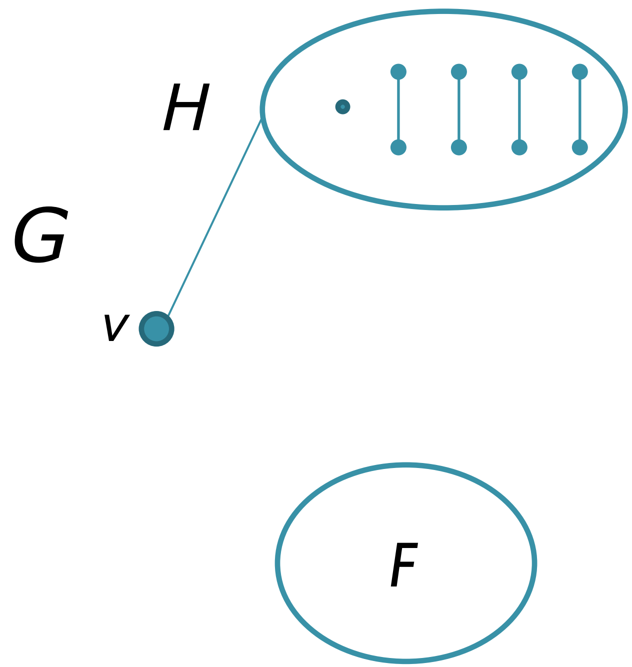
F es uno de esos 16475 grafos.

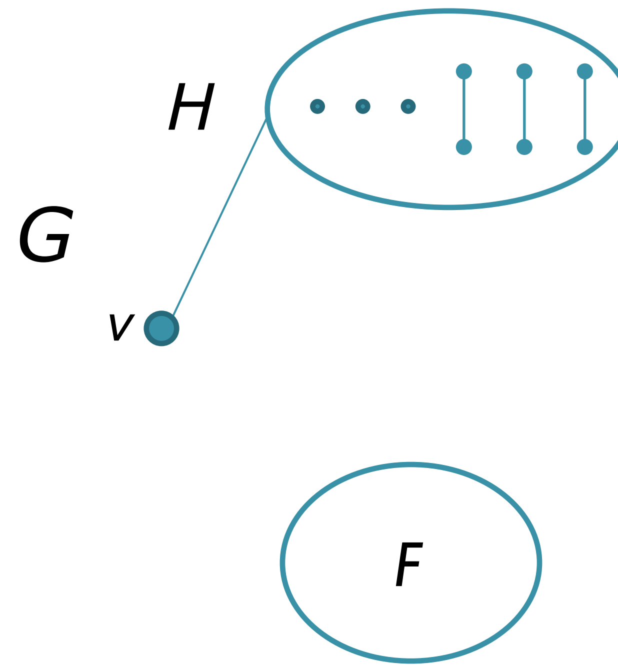
Al añadir aristas entre *H* y *F* para construir *G* se llega a contradicción, luego existen en *G* vértices de valencia 9.



Prueba del resultado principal

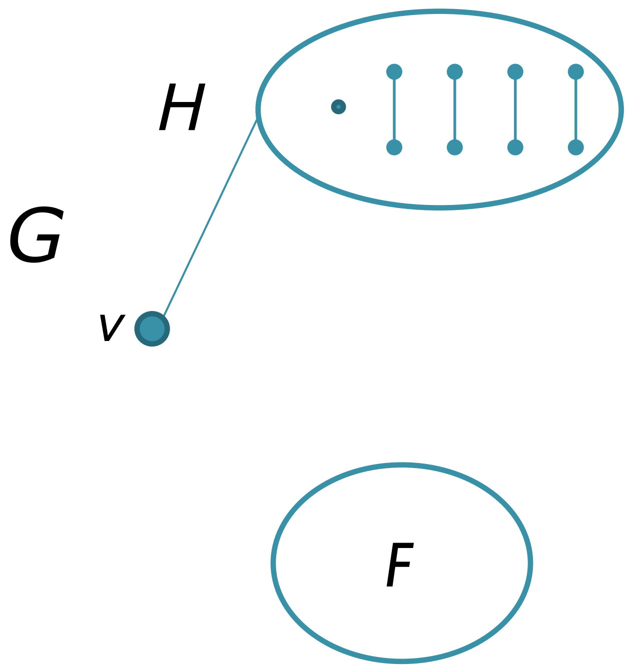
Podemos suponer que *v* tiene valencia 9. En ese caso *H* está formado por 3 ó 4 aristas disjuntas y *F* tiene 20 vértices.

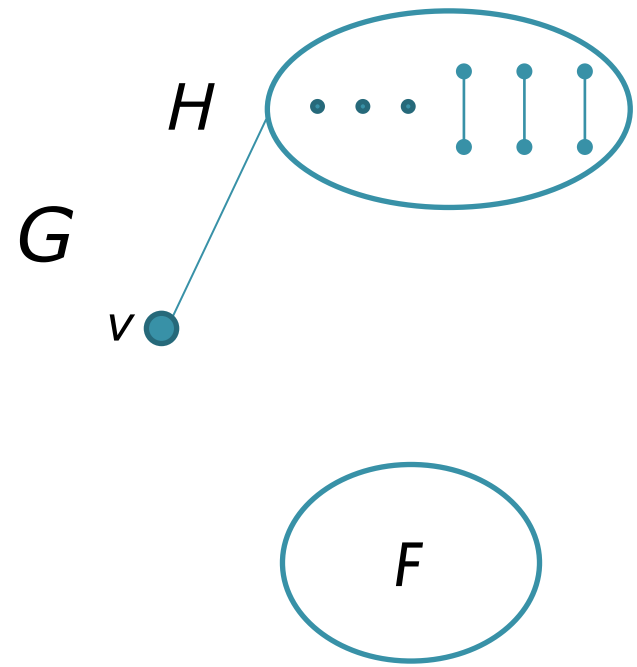




Prueba del resultado principal

Radziszowski, Shetler y Wurtz encontraron los 10751 grafos de 20 vértices que no contienen a J_4 y que su complementario no contiene a K_6.

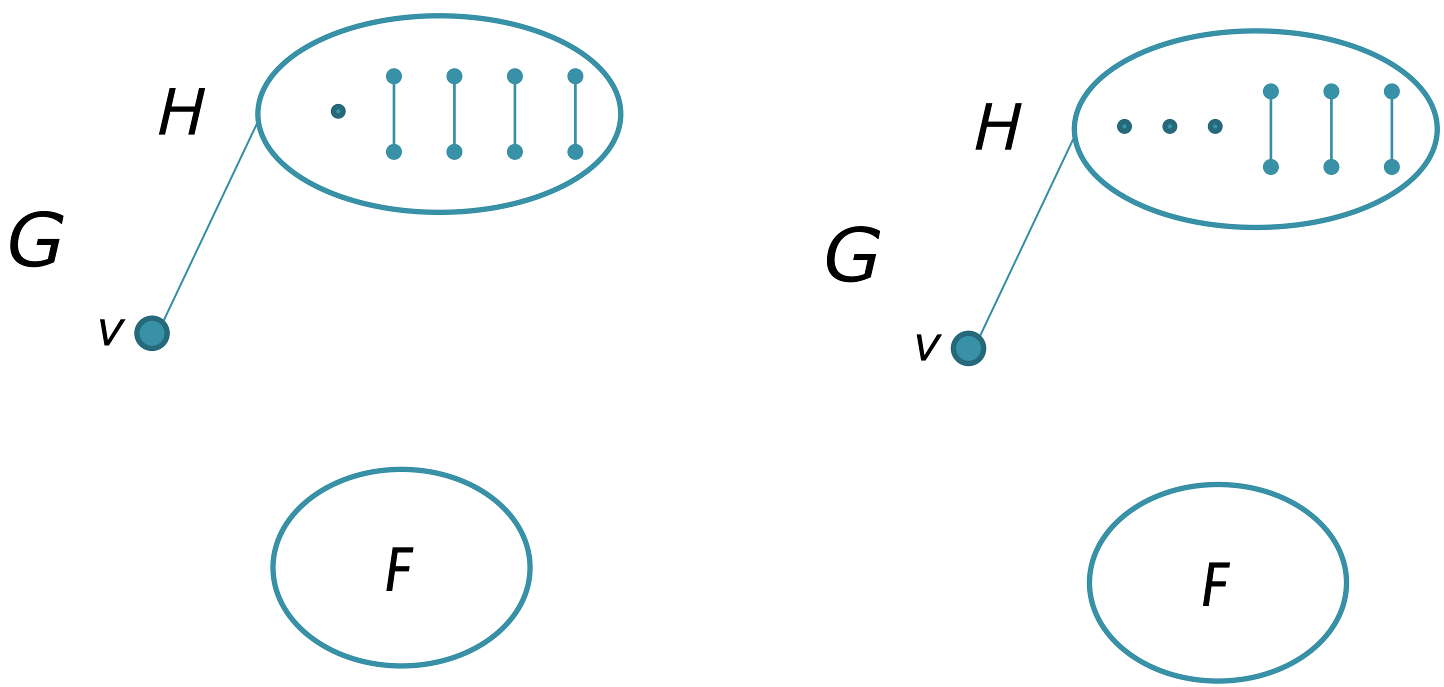




Prueba del resultado principal

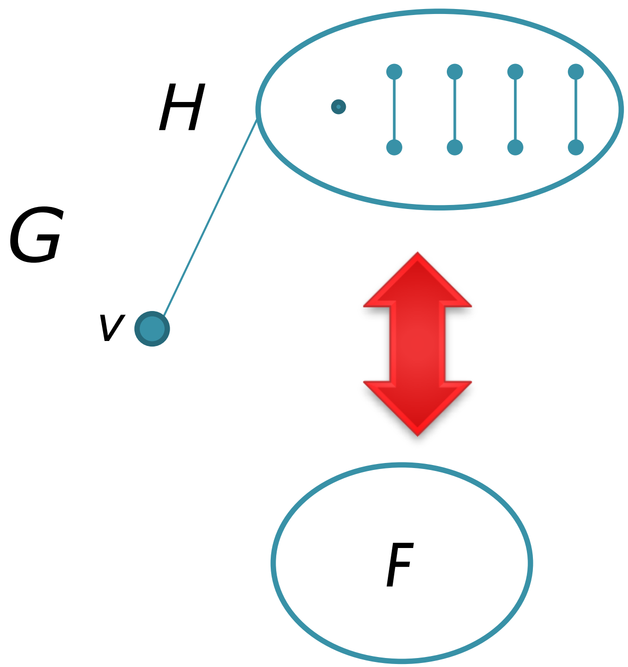
Radziszowski, Shetler y Wurtz encontraron los 10751 grafos de 20 vértices que no contienen a J_4 y que su complementario no contiene a K_6.

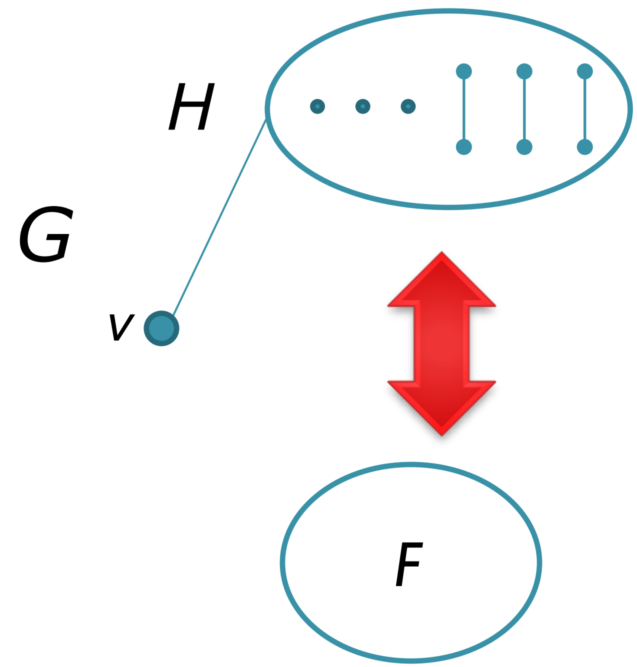
F es uno de esos 10751 grafos.



Prueba del resultado principal

Al añadir aristas entre *H* y *F* para construir *G* se llega a contradicción, luego no existe *G* y se obtiene el resultado.





Otros problemas abiertos relacionados

Calcular valores exactos o, en su defecto, cotas, de $R(J_4,G)$ donde G es cualquiera de los 1044 grafos de 7 vértices.

Otros problemas abiertos relacionados

Calcular valores exactos o, en su defecto, cotas, de $R(J_4,G)$ donde G es cualquiera de los 1044 grafos de 7 vértices.

Calcular valores exactos o, en su defecto, cotas, de $R(K_4,G)$ donde G es cualquiera de los 156 grafos de 6 vértices.

Nuestro agradecimiento a Stanislaw Radziszowski por habernos facilitado las listas de los grafos de 19 y 20 vértices que no contienen a J_4 y que sus complementarios no contienen a K_6.