# Propiedades estructurales en 2-Cayley óptimos sobre grupos abelianos finitos

F. Aguiló

trabajo conjunto con A. Miralles y M. Zaragozá

Dept. MA-IV, UPC, Barcelona.

*JMDA 2012*, 11-13 Julio, Almería.

# Definiciones

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}_C(N) &= \min\{\mathrm{D}(\mathrm{G}_N, \{a,b\}) : \ \mathrm{G}_N \text{ cíclico}, \ \langle a,b\rangle = \mathrm{G}_N\},\\
\mathrm{D}_{NC}(N) &= \min\{\mathrm{D}(\mathrm{G}_N; \{a,b\}) : \ \mathrm{G}_N \text{ no cíclico}, \ \langle a,b\rangle = \mathrm{G}_N\},\\
\mathrm{D}(N) &= \min\{\mathrm{D}_C(N), \mathrm{D}_{NC}(N)\} \geq \mathrm{lb}(N) = \left\lceil \sqrt{3N} \right\rceil - 2.
\end{aligned}
$$

Diremos que $\mathrm{Cay}(\mathrm{G}_N, \{a,b\})$ es $k$-tight si

$$\mathrm{D}(\mathrm{G}_N, \{a,b\}) = \mathrm{lb}(N) + k.$$

# Herramientas

**Diagrama de Distancias Mínimas** (Sabariego y Santos '09)

Un DDM asociado a $\mathrm{Cay}(\mathrm{G}_N, \{a, b\})$ es una aplicación $\psi : \mathrm{G}_N \to \mathbb{N}^2$ cumpliendo

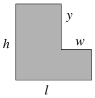
(a) para cada $g \in \mathrm{G}_N$, $\psi(g) = (i, j)$ satisface $ia + jb = g$ y $\|\psi(g)\|$ es mínimo sobre todos los vectores en $\mathbb{N}^2$ con esa propiedad ($\|(i, j)\| = i + j$),

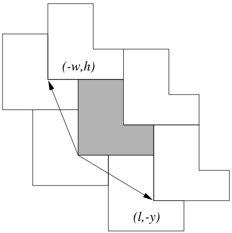
(b) para cada $g \in \mathrm{G}_N$, y para cada $(s, t) \in \mathbb{N}^2$ que es menor que $\psi(g)$ coordenada a coordenada, se tiene que $(s, t) = \psi(h)$ para algún $h \in \mathrm{G}_N$ (con $sa + tb = h$).

# Herramientas

Representamos estos diagramas mediante su imagen $\psi(\mathrm{G}_N)$, donde cada punto $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ se identifica con el cuadrado unitario $[\![i,j]\!] = [i, i+1] \times [j, j+1] \in \mathbb{R}^2$.

Se puede demostrar que tienen forma de L o rectangular. Además teselan el plano.

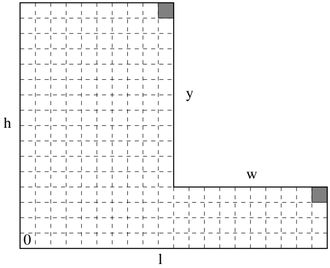



Las denotamos mediante $L(l, h, w, y)$.

# Herramientas

A partir de un DDM $\mathcal{H} = L(l, h, w, y)$ es sencillo calcular el diámetro




$$\mathrm{d}_{\mathcal{H}} = l + h - \min\{w, y\} - 2$$

# Motivación del trabajo

¿Podemos observar propiedades métrico-estructurales de los 2-Cayley a partir de sus DDM?

# Motivación del trabajo

Ejemplo (cociente): $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{16}, \{2, 5\}) \leftrightarrow \mathcal{H}_{16} = L(5, 4, 2, 2)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 3 | | |
| 10 | 12 | 14 | | |
| 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

$$\mathrm{d}_{\mathcal{H}_{16}} = \mathrm{D}(16) = 5$$

# Motivación del trabajo

Ejemplo (cociente): $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{16}, \{2,5\}) \leftrightarrow \mathcal{H}_{16} = L(5,4,2,2)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 3 | | |
| 10 | 12 | 14 | | |
| 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 3 | | |
| 10 | 12 | 14 | | |
| 5 | 7 | 9 | 11 | 13 |
| 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |

$\mathrm{d}_{\mathcal{H}_{16}} = \mathrm{D}(16) = 5$

$\mathcal{H}_8 = L(4,2,1,0)$,
$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_8, \{2,5\})$,
$\mathrm{d}_{\mathcal{H}_8} = 4 > \mathrm{D}(8) = 3$.

# Motivación del trabajo

Ejemplo (cociente):

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}, \{(0,1),(3,2)\}) \leftrightarrow \mathcal{H}_{48} = L(8,8,4,4)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | | | | |
| (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) | | | | |
| (3,10) | (3,11) | (3,0) | (3,1) | | | | |
| (0,8) | (0,9) | (0,10) | (0,11) | | | | |
| (1,6) | (1,7) | (1,8) | (1,9) | (1,10) | (1,11) | (1,0) | (1,1) |
| (2,4) | (2,5) | (2,6) | (2,7) | (2,8) | (2,9) | (2,10) | (2,11) |
| (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) | (3,7) | (3,8) | (3,9) |
| (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) | (0,4) | (0,5) | (0,6) | (0,7) |

$\mathrm{d}_{\mathcal{H}_{48}} = \mathrm{D}(48) = 10$

# Motivación del trabajo

Ejemplo (cociente):

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}, \{(0,1),(3,2)\}) \leftrightarrow \mathcal{H}_{48} = L(8,8,4,4)$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | | | | |
| (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) | | | | |
| (3,10) | (3,11) | (3,0) | (3,1) | | | | |
| (0,8) | (0,9) | (0,10) | (0,11) | | | | |
| (1,6) | (1,7) | (1,8) | (1,9) | (1,10) | (1,11) | (1,0) | (1,1) |
| (2,4) | (2,5) | (2,6) | (2,7) | (2,8) | (2,9) | (2,10) | (2,11) |
| (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) | (3,7) | (3,8) | (3,9) |
| (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) | (0,4) | (0,5) | (0,6) | (0,7) |

$\mathrm{d}_{\mathcal{H}_{48}} = \mathrm{D}(48) = 10$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,2) | (1,3) | (1,4) | (1,5) | | | | |
| (2,0) | (2,1) | (2,2) | (2,3) | | | | |
| (3,10) | (3,11) | (3,0) | (3,1) | | | | |
| (0,8) | (0,9) | (0,10) | (0,11) | | | | |
| (1,6) | (1,7) | (1,8) | (1,9) | (1,10) | (1,11) | (1,0) | (1,1) |
| (2,4) | (2,5) | (2,6) | (2,7) | (2,8) | (2,9) | (2,10) | (2,11) |
| (3,2) | (3,3) | (3,4) | (3,5) | (3,6) | (3,7) | (3,8) | (3,9) |
| (0,0) | (0,1) | (0,2) | (0,3) | (0,4) | (0,5) | (0,6) | (0,7) |

$\mathcal{H}_{12} = L(4,4,2,2)$,
$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6, \{(0,1),(3,2)\})$,
$\mathrm{d}_{\mathcal{H}_{12}} = 4 = \mathrm{D}(12)$.

# Motivación del trabajo

Ejemplo (expansión):

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{11}, \{1, 4\})$

$\mathcal{H}_{11} = L(4, 3, 1, 1)$.

# Motivación del trabajo

Ejemplo (expansión):

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{11}, \{1,4\}) \cong \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_{11}, \{(0,1),(-1,4)\})$,

$\mathcal{H}_{11} = L(4,3,1,1)$.

$$\mathrm{diag}(1,11) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} M(4,3,1,1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Motivación del trabajo

Ejemplo (expansión):

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{11}, \{1,4\}) \cong \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_{11}, \{(0,1),(-1,4)\})$,

$\mathcal{H}_{11} = L(4,3,1,1)$.

$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_{11m}, \{(0,1),(-1,4)\}) \leftrightarrow \mathcal{H}_{11m^2} = L(4m,3m,m,m)$,

$\mathrm{d}_{\mathcal{H}_{11m^2}} = 6m-2 = \mathrm{D}(11m^2)$,

$2 \leq m \leq 7$.

# Optimalidad en cocientes de 2-Cayley

# Optimalidad en cocientes de 2-Cayley

Dado un DDM $\mathcal{H} = L(l, h, w, y)$, denotemos

$$\begin{aligned} m\mathcal{H} &= L(ml, mh, mw, my), \\ \mathcal{H}/m &= L(l/m, h/m, w/m, y/m), \\ \mathrm{mcd}(\mathcal{H}) &= \mathrm{mcd}(l, h, w, y). \end{aligned}$$

Si $U$ es la matriz unimodular izquierda de la FNS de $M(l, h, w, y)$, denotemos por $U_1$ y $U_2$ a sus columnas izquierda y derecha, respectivamente.

# Optimalidad en cocientes de 2-Cayley

**Proposición**

Sea $\mathcal{H}$ una L-forma de área $N$ con $\mathrm{mcd}(\mathcal{H}) = g > 1$.
Sea $f \in \mathbb{N}$ un divisor de $g$. Entonces,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \leftrightarrow & \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_g \times \mathbb{Z}_{N/g}, \{U_1, U_2\}) \\ & \Updownarrow & \\ \mathcal{H}/f & \leftrightarrow & \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{g/f} \times \mathbb{Z}_{N/(fg)}, \{U_1, U_2\}). \end{array}$$

# Optimalidad en cocientes de 2-Cayley

**Proposición**

Sea $\mathcal{H}$ una L-forma de área $N$ con $\mathrm{mcd}(\mathcal{H}) = g > 1$.
Sea $f \in \mathbb{N}$ un divisor de $g$. Entonces,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \leftrightarrow & \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_g \times \mathbb{Z}_{N/g}, \{U_1, U_2\}) \\ & \Updownarrow & \\ \mathcal{H}/f & \leftrightarrow & \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{g/f} \times \mathbb{Z}_{N/(fg)}, \{U_1, U_2\}). \end{array}$$

**Teorema**

Sea $\mathcal{H}$ una L-forma de área $N$ y $\mathrm{mcd}(\mathcal{H}) = g > 1$.
Si $\mathrm{d}_{\mathcal{H}} = \mathrm{D}_{NC}(N)$, entonces

(a) $\mathrm{d}_{\mathcal{H}/g} = \mathrm{D}_C(N/g^2)$,

(b) $\mathrm{d}_{\mathcal{H}/f} = \mathrm{D}_{NC}(N/f^2)$ para cualquier $f < g$ divisor de $g$.

# Optimalidad en expansiones de 2-Cayley

# Optimalidad en expansiones de 2-Cayley

Dado un DDM $\mathcal{H}$, de área $N$, con diámetro óptimo $\mathrm{d}_{\mathcal{H}} = \mathrm{D}(N)$, ¿qué podemos decir de la optimalidad de $m\mathcal{H}$ para $m \geq 2$?

Dado un 2-Cayley $\mathrm{Cay}(\mathrm{G}_N, \{a, b\})$ óptimo, estamos interesados en la optimalidad de $\mathrm{Cay}(\mathrm{G}_{m^2N}, \{a, b\})$, para $m \geq 2$.

No tenemos asegurada la optimalidad, tanto si $\mathrm{G}_N$ es cíclico como si no lo es.

Consideremos el caso particular tight.

# Optimalidad en expansiones de 2-Cayley

**Proposición**

Sea $\mathcal{H}$ un DDM tight. Entonces,

$$m\mathcal{H} \text{ tight} \Leftrightarrow m\lceil\sqrt{3N}\rceil = \lceil m\sqrt{3N}\rceil.$$

# Optimalidad en expansiones de 2-Cayley

**Proposición**

Sea $\mathcal{H}$ un DDM tight. Entonces,

$$m\mathcal{H} \text{ tight} \Leftrightarrow m\lceil\sqrt{3N}\rceil = \lceil m\sqrt{3N}\rceil.$$

**Lema**

$m\lceil\sqrt{3N}\rceil = \lceil m\sqrt{3N}\rceil, \forall m \geq 2 \Leftrightarrow N = 3t^2,\ t \in \mathbb{N}.$

# Optimalidad en expansiones de 2-Cayley

**Proposición**

Sea $\mathcal{H}$ un DDM tight. Entonces,

$$m\mathcal{H} \text{ tight} \Leftrightarrow m\lceil\sqrt{3N}\rceil = \lceil m\sqrt{3N}\rceil.$$

**Lema**

$m\lceil\sqrt{3N}\rceil = \lceil m\sqrt{3N}\rceil, \forall m \geq 2 \Leftrightarrow N = 3t^2$, $t \in \mathbb{N}$.

**Teorema**

Sea el 2-Cayley tight $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_3, \{2,1\}) \leftrightarrow \mathcal{H}_3 = L(2,2,1,1)$. Entonces, para todo $t \geq 2$ tenemos

(a) $t\mathcal{H}_3 = L(2t, 2t, t, t)$ es un DDM de área $N_t = 3t^2$,

(b) $t\mathcal{H}_3 \leftrightarrow \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_t \times \mathbb{Z}_{3t}, \{(1,-1),(0,1)\})$,

(c) $\mathrm{d}_{t\mathcal{H}_3} = 3t - 2 = \mathrm{D}_{NC}(N_t) = \mathrm{lb}(N_t)$.

# Optimalidad en expansiones de 2-Cayley

Si $\mathrm{Cay}(\mathrm{G}_N, \{a, b\})$ es tight y $N \neq 3t^2$, su número de expansiones tight es finito (lema anterior).

# Optimalidad en expansiones de 2-Cayley

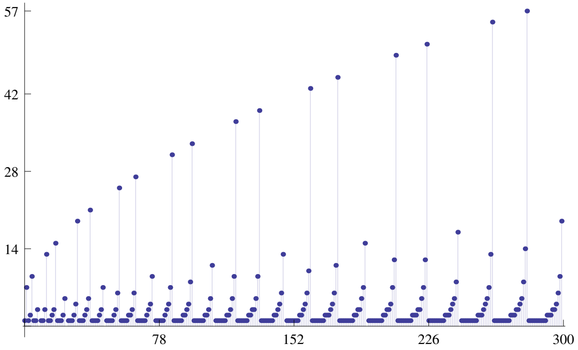
Si $\mathrm{Cay}(\mathrm{G}_N, \{a, b\})$ es tight y $N \neq 3t^2$, su número de expansiones tight es finito (lema anterior).

**Teorema**

Sea $\mathcal{H}$ un DDM tight de área $N \neq 3t^2$. Entonces, $m\mathcal{H}$ es un DDM tight si

$$2 \leq m \leq \mathrm{c}(N) = \left\lfloor \frac{1}{\lceil\sqrt{3N}\rceil - \sqrt{3N}} \right\rfloor.$$

# Optimalidad en expansiones de 2-Cayley




$c(N)$, $4 \leq N \leq 300$ y $N \neq 3t^2$.

# Optimalidad en expansiones de 2-Cayley

**Teorema**

Sea $N_t = 3t^2 + 2t$, $t \geq 1$. Entonces,

(a) $\mathcal{H}_t = L(2t, 2t+1, t, t)$ DDM de área $N_t$,

(b) $\mathcal{H}_t \leftrightarrow \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{N_t}, \{2t+1, t\})$,

(c) $\mathrm{d}_{\mathcal{H}_t} = \mathrm{D}_C(N_t) = \mathrm{lb}(N_t) = 3t-1$,

(d) $m\mathcal{H}_t$ DDM tight, $2 \leq m \leq \mathrm{c}(N_t) = 6t+1$,

(e) $m\mathcal{H}_t \leftrightarrow \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_{mN_t}, \{(2, 2t+1), (1, t)\})$,

(f) $\mathrm{d}_{m\mathcal{H}_t} = 3mt + m - 2 = \mathrm{D}_{NC}(m^2 N_t) = \mathrm{lb}(m^2 N_t)$, $2 \leq m \leq 6t+1$.

# Optimalidad en expansiones de 2-Cayley

**Teorema**

Sea $N_s = 27s^2 + 18s$, $s \geq 1$. Entonces,

(a) $\mathcal{H}_s = L(6s+3, 6s, 3s, 3s)$ DDM de área $N_s$,

(b) $\mathcal{H}_s \leftrightarrow \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{9s^2+6s}, \{(1, -3s), (0, 1)\})$,

(c) $\mathrm{d}_{\mathcal{H}_s} = \mathrm{D}_{NC}(N_s) = \mathrm{lb}(N_s) = 9s + 1$,

(d) $m\mathcal{H}_s$ DDM tight, $2 \leq m \leq \mathrm{c}(N_s) = 2s$,

(e) $m\mathcal{H}_s \leftrightarrow \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{3m} \times \mathbb{Z}_{m(9s^2+6s)}, \{(1, -3s), (0, 1)\})$,

(f) $\mathrm{d}_{m\mathcal{H}_s} = 9ms + 3m - 2 = \mathrm{D}_{NC}(m^2 N_s) = \mathrm{lb}(m^2 N_s)$, $2 \leq m \leq 2s$.