Puertas cuánticas discretas

José Juan Carreño Carreño
Jesús García López de Lacalle

Departamento de Matemática Aplicada (EUI)

Universidad Politécnica de Madrid

Puertas cuánticas discretas

1. Introducción a la computación cuántica
2. Estados cuánticos discretos
3. Puertas cuánticas discretas

1. Introducción a la computación cuántica

1. Introducción a la computación cuántica

Base de computación para n qubits $(N = 2^n)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}_n &= \left[\, |0\cdots00\rangle,\ |0\cdots01\rangle,\ |0\cdots10\rangle\ \ldots\ |1\cdots11\rangle \,\right] \\
&= \left[\, |0\rangle,\ |1\rangle,\ |2\rangle\ \ldots\ |N-1\rangle \,\right]
\end{aligned}
$$

1. Introducción a la computación cuántica

Base de computación para n qubits $(N = 2^n)$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n &= \left[\, |0\cdots 00\rangle,\ |0\cdots 01\rangle,\ |0\cdots 10\rangle\ \ldots\ |1\cdots 11\rangle \,\right] \\ &= \left[\, |0\rangle,\ |1\rangle,\ |2\rangle\ \ldots\ |N-1\rangle \,\right]\end{aligned}$$

Estados cuánticos: n-qubits

$$\Psi = \sum_{k=0}^{N-1} a_k |k\rangle \quad \text{tal que} \quad a_k \in \mathbb{C} \text{ para todo } 0 \leq k < N \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 = 1$$

1. Introducción a la computación cuántica

Base de computación para n qubits $(N = 2^n)$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n &= [\, |0\cdots 00\rangle, |0\cdots 01\rangle, |0\cdots 10\rangle \ldots |1\cdots 11\rangle \,] \\ &= [\, |0\rangle, |1\rangle, |2\rangle \ldots |N-1\rangle \,] \end{aligned}$$

Estados cuánticos: n-qubits

$$\Psi = \sum_{k=0}^{N-1} a_k |k\rangle \quad \text{tal que} \quad a_k \in \mathbb{C} \text{ para todo } 0 \le k < N \quad \text{y} \quad \sum_{k=0}^{N-1} |a_k|^2 = 1$$

Puertas cuánticas

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : \quad \boxed{\begin{array}{rcl|rcl} X|0\rangle &=& |1\rangle & X_j|*0*\rangle &=& |*1*\rangle \\ X|1\rangle &=& |0\rangle & X_j|*1*\rangle &=& |*0*\rangle \end{array}}$$

1. Introducción a la computación cuántica

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} : \boxed{\begin{array}{rcl} V|0\rangle & = & |0\rangle \\ V|1\rangle & = & i|1\rangle \end{array}} \qquad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \boxed{\begin{array}{l} H|0\rangle = |0\rangle + |1\rangle \\ H|1\rangle = |0\rangle - |1\rangle \end{array}}$$

1. Introducción a la computación cuántica

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} : \boxed{\begin{array}{rcl} V|0\rangle & = & |0\rangle \\ V|1\rangle & = & i|1\rangle \end{array}} \qquad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \boxed{\begin{array}{l} H|0\rangle = |0\rangle + |1\rangle \\ H|1\rangle = |0\rangle - |1\rangle \end{array}}$$

$$C = \begin{pmatrix} I & \\ & X \end{pmatrix} : \boxed{\begin{array}{l} C|0x\rangle = |0x\rangle \\ C|1x\rangle = |1\overline{x}\rangle \end{array}} \qquad CV = \begin{pmatrix} I & \\ & V \end{pmatrix} : \boxed{\begin{array}{rcl} CV|0x\rangle & = & |0x\rangle \\ CV|x0\rangle & = & |x0\rangle \\ CV|11\rangle & = & i|11\rangle \end{array}}$$

1. Introducción a la computación cuántica

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}: \boxed{\begin{array}{rcl} V|0\rangle & = & |0\rangle \\ V|1\rangle & = & i|1\rangle \end{array}} \qquad H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}: \boxed{\begin{array}{l} H|0\rangle = |0\rangle + |1\rangle \\ H|1\rangle = |0\rangle - |1\rangle \end{array}}$$

$$C = \begin{pmatrix} I & \\ & X \end{pmatrix}: \boxed{\begin{array}{l} C|0x\rangle = |0x\rangle \\ C|1x\rangle = |1\overline{x}\rangle \end{array}} \qquad CV = \begin{pmatrix} I & \\ & V \end{pmatrix}: \boxed{\begin{array}{rcl} CV|0x\rangle & = & |0x\rangle \\ CV|x0\rangle & = & |x0\rangle \\ CV|11\rangle & = & i|11\rangle \end{array}}$$

$$T = \begin{pmatrix} I & \\ & C \end{pmatrix}: \boxed{\begin{array}{l} T|0xy\rangle = |0xy\rangle \\ T|x0y\rangle = |x0y\rangle \\ T|11x\rangle = |11\overline{x}\rangle \end{array}} \qquad TV = \begin{pmatrix} I & \\ & CV \end{pmatrix}: \boxed{\begin{array}{rcl} TV|0xy\rangle & = & |0xy\rangle \\ TV|x0y\rangle & = & |x0y\rangle \\ TV|xy0\rangle & = & |xy0\rangle \\ TV|111\rangle & = & i|111\rangle \end{array}}$$

2. Estados cuánticos discretos

2. Estados cuánticos discretos

Conjunto discreto de estados cuánticos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

2. Estados cuánticos discretos

Conjunto discreto de estados cuánticos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Definición 1. $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es el menor conjunto que verifica las siguientes propiedades:

1. La base de computación está contenida en $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.
2. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es invariante para las puertas $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{CV}$ y $\boldsymbol{TV}$.

2. Estados cuánticos discretos

Conjunto discreto de estados cuánticos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Definición 1. $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es el menor conjunto que verifica las siguientes propiedades:

1. La base de computación está contenida en $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.
2. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es invariante para las puertas $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{CV}$ y $\boldsymbol{TV}$.

Propiedades:

2. Estados cuánticos discretos

Conjunto discreto de estados cuánticos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Definición 1. $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es el menor conjunto que verifica las siguientes propiedades:

1. La base de computación está contenida en $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.
2. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es invariante para las puertas $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{CV}$ y $\boldsymbol{TV}$.

Propiedades:

1. Las puertas $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{CV}$ y $\boldsymbol{TV}$ permiten multiplicar por $\boldsymbol{i}$ cualquier coordenada.

2. Estados cuánticos discretos

Conjunto discreto de estados cuánticos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Definición 1. $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es el menor conjunto que verifica las siguientes propiedades:

1. La base de computación está contenida en $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.
2. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es invariante para las puertas $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{CV}$ y $\boldsymbol{TV}$.

Propiedades:

1. Las puertas $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{CV}$ y $\boldsymbol{TV}$ permiten multiplicar por $\boldsymbol{i}$ cualquier coordenada.
2. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es invariante para las puertas $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{X = HV^2H, \qquad C = H_2\, CV^2\, H_2, \qquad T = H_3\, TV^2\, H_3}$$

2. Estados cuánticos discretos

Conjunto discreto de estados cuánticos $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Definición 1. $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es el menor conjunto que verifica las siguientes propiedades:

1. La base de computación está contenida en $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.
2. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es invariante para las puertas $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{CV}$ y $\boldsymbol{TV}$.

Propiedades:

1. Las puertas $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{CV}$ y $\boldsymbol{TV}$ permiten multiplicar por $\boldsymbol{i}$ cualquier coordenada.
2. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ es invariante para las puertas $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{T}$:

$$\boldsymbol{X = HV^2H}, \qquad \boldsymbol{C = H_2\,CV^2\,H_2}, \qquad \boldsymbol{T = H_3\,TV^2\,H_3}$$

3. Las puertas $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{C}$ y $\boldsymbol{T}$ permiten realizar cualquier permutación de coordenadas.

2. Estados cuánticos discretos

Caracterización del conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

2. Estados cuánticos discretos

Caracterización del conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Teorema 1. El estado $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$ si y solo si existe $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ tal que:

2. Estados cuánticos discretos

Caracterización del conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Teorema 1. El estado $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$ si y solo si existe $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ tal que:

1. $\boldsymbol{\psi} = \dfrac{\mathbf{1}}{\left(\sqrt{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{k}}} \left(\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}_{\mathbf{0}},\ \boldsymbol{x}_{\mathbf{1}} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}_{\mathbf{1}},\ \ldots,\ \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}-\mathbf{1}} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{N}-\mathbf{1}}\right)$

2. Estados cuánticos discretos

Caracterización del conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Teorema 1. El estado $\boldsymbol{\psi \in \mathcal{E}}$ si y solo si existe $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ tal que:

1. $\boldsymbol{\psi = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{k}} \left(x_0 + i y_0,\ x_1 + i y_1,\ \ldots,\ x_{N-1} + i y_{N-1}\right)}$

2. Las coordenadas son enteras:

$$\boldsymbol{x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1,\ \ldots,\ x_{N-1},\ y_{N-1}} \in \mathbb{Z}$$

2. Estados cuánticos discretos

Caracterización del conjunto $\mathcal{E}$

Teorema 1. El estado $\psi \in \mathcal{E}$ si y solo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que:

1. $\psi = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^k}(x_0 + iy_0,\, x_1 + iy_1,\, \ldots,\, x_{N-1} + iy_{N-1})$

2. Las coordenadas son enteras:

$$x_0,\, y_0,\, x_1,\, y_1,\, \ldots,\, x_{N-1},\, y_{N-1} \in \mathbb{Z}$$

3. Se verifica la ecuación diofántica

$$x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2 + y_{N-1}^2 = 2^k$$

2. Estados cuánticos discretos

Caracterización del conjunto $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

Teorema 1. El estado $\boldsymbol{\psi \in \mathcal{E}}$ si y solo si existe $\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$ tal que:

1. $\psi = \dfrac{\mathbf{1}}{\left(\sqrt{\mathbf{2}}\right)^{k}}\left(x_0 + iy_0,\, x_1 + iy_1,\, \ldots,\, x_{N-1} + iy_{N-1}\right)$

2. Las coordenadas son enteras:

$$x_0,\, y_0,\, x_1,\, y_1,\, \ldots,\, x_{N-1},\, y_{N-1} \in \mathbb{Z}$$

3. Se verifica la ecuación diofántica

$$x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_{N-1}^2 + y_{N-1}^2 = 2^k$$

Si $\boldsymbol{k}$ es mínimo entonces decimos que el estado pertenece al nivel $\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{\psi \in \mathcal{L}_k}$$

2. Estados cuánticos discretos

Estados reducibles

2. Estados cuánticos discretos

Estados reducibles

Definición. Decimos que $\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{a_0}, \boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_{N-1}})$ es **reducible** si verifica que

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Re}(\boldsymbol{a_{2k}}) &\equiv \mathrm{Re}(\boldsymbol{a_{2k+1}}) \mod \mathbf{2} \\ \mathrm{Im}(\boldsymbol{a_{2k}}) &\equiv \mathrm{Im}(\boldsymbol{a_{2k+1}}) \mod \mathbf{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{para todo } \mathbf{0} \leq \boldsymbol{k} \leq \boldsymbol{N}/\mathbf{2}$$

2. Estados cuánticos discretos

Estados reducibles

Definición. Decimos que $\psi = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$ es **reducible** si verifica que

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}(a_{2k}) \equiv \mathrm{Re}(a_{2k+1}) \mod 2 \\ \\ \mathrm{Im}(a_{2k}) \equiv \mathrm{Im}(a_{2k+1}) \mod 2 \end{array}\right\} \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq N/2$$

Propiedad. Sea ψ un estado de $\mathcal{L}_k$. Entonces

$$\psi \quad \text{es reducible si y solo si} \quad H_n\psi \in \mathcal{L}_{k-1}$$

2. Estados cuánticos discretos

Estados reducibles

Definición. Decimos que $\psi = (a_0,\, a_1,\, \ldots\,,\, a_{N-1})$ es **reducible** si verifica que

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}(a_{2k}) \equiv \mathrm{Re}(a_{2k+1}) \bmod 2 \\[1em] \mathrm{Im}(a_{2k}) \equiv \mathrm{Im}(a_{2k+1}) \bmod 2 \end{array}\right\} \quad \text{para todo } 0 \leq k \leq N/2$$

Propiedad. Sea ψ un estado de $\mathcal{L}_k$. Entonces

$$\psi \quad \text{es reducible si y solo si} \quad H_n\psi \in \mathcal{L}_{k-1}$$

Ejemplos:

$$(3,\, 1+2i,\, i,\, -i) \in \mathcal{L}_4 \quad \rightarrow \quad (4+2i,\, 2-2i,\, 0,\, 2i) = (2+i,\, 1-i,\, 0,\, i) \in \mathcal{L}_3$$

$$(3,\, 2+i,\, i,\, -i) \in \mathcal{L}_4 \quad \rightarrow \quad (5+i,\, 1-i,\, 0,\, 2i) \in \mathcal{L}_5$$

2. Estados cuánticos discretos

La demostración (**teorema 1**) de que $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{E}$ es constructiva

Nivel 2	$(\ 1+i\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ -1+i\ )$	
		$X_2C_{21}X_2$
	$(\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1+i\ ,\ -1+i\ )$	
		H_2
- - - - -	$(\ 0\ ,\ 0\ ,\ 2i\ ,\ 2\ )$	
		simplificar
Nivel 1	$(\ 0\ ,\ 0\ ,\ i\ ,\ 1\ )$	
		X_2
	$(\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ i\ )$	
		CV_{12}
	$(\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ -1\ )$	
		H_2
- - - - -	$(\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 2\ )$	
		simplificar
Nivel 0	$(\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 1\ )$	

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

Propiedades. Sea $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{L}_k}$, con $\boldsymbol{k > 0}$:

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

Propiedades. Sea $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{L}_k}$, con $\boldsymbol{k > 0}$:

a) El número de componentes impares (reales o imaginarias) de $\boldsymbol{\psi}$ es par.

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

Propiedades. Sea $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{L}_k}$, con $\boldsymbol{k > 0}$:

a) El número de componentes impares (reales o imaginarias) de $\boldsymbol{\psi}$ es par.

b) El número de coordenadas $\boldsymbol{(p, i)}$ o $\boldsymbol{(i, p)}$ de $\boldsymbol{\psi}$ es par.

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

Propiedades. Sea $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{L}_k}$, con $\boldsymbol{k > 0}$:

a) El número de componentes impares (reales o imaginarias) de $\boldsymbol{\psi}$ es par.

b) El número de coordenadas $\boldsymbol{(p,\, i)}$ o $\boldsymbol{(i,\, p)}$ de $\boldsymbol{\psi}$ es par.

Demostración. Sea $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{L}_k}$, con $\boldsymbol{k > 0}$. Convertir $\boldsymbol{\psi}$ en reducible del siguiente modo:

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

Propiedades. Sea $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{L}_k}$, con $\boldsymbol{k > 0}$:

a) El número de componentes impares (reales o imaginarias) de $\boldsymbol{\psi}$ es par.

b) El número de coordenadas $\boldsymbol{(p,\ i)}$ o $\boldsymbol{(i,\ p)}$ de $\boldsymbol{\psi}$ es par.

Demostración. Sea $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{L}_k}$, con $\boldsymbol{k > 0}$. Convertir $\boldsymbol{\psi}$ en reducible del siguiente modo:

a) Transformar todas las coordenadas $\boldsymbol{(i,\ p)}$ en $\boldsymbol{(p,\ i)}$.

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

Propiedades. Sea $\psi \in \mathcal{L}_k$, con $k > 0$:

a) El número de componentes impares (reales o imaginarias) de ψ es par.

b) El número de coordenadas $(p,\ i)$ o $(i,\ p)$ de ψ es par.

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{L}_k$, con $k > 0$. Convertir ψ en reducible del siguiente modo:

a) Transformar todas las coordenadas $(i,\ p)$ en $(p,\ i)$.

b) Reordenar las coordenadas de modo que las posiciones $2k$ y $2k+1$ ($k > 0$) sean

$$(p,\ i) - (p,\ i), \qquad (p,\ p) - (p,\ p) \qquad \text{ó} \qquad (i,\ i) - (i,\ i)$$

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

Propiedades. Sea $\psi \in \mathcal{L}_k$, con $k > 0$:

a) El número de componentes impares (reales o imaginarias) de ψ es par.

b) El número de coordenadas $(p,\, i)$ o $(i,\, p)$ de ψ es par.

Demostración. Sea $\psi \in \mathcal{L}_k$, con $k > 0$. Convertir ψ en reducible del siguiente modo:

a) Transformar todas las coordenadas $(i,\, p)$ en $(p,\, i)$.

b) Reordenar las coordenadas de modo que las posiciones $2k$ y $2k+1$ ($k > 0$) sean

$$(p,\, i) - (p,\, i), \qquad (p,\, p) - (p,\, p) \qquad \text{ó} \qquad (i,\, i) - (i,\, i)$$

c) Si las coordenadas $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ tienen una de las configuraciones anteriores ψ es reducible:

$$H_n \psi \in \mathcal{L}_{k-1}$$

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

d) Si la configuración de las coordenadas $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ es $(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{i},\, \boldsymbol{i})$, consideramos

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

d) Si la configuración de las coordenadas $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ es $(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{i},\, \boldsymbol{i})$, consideramos

$$\boxed{\boldsymbol{R = \tilde{V} H_n \tilde{V} H_n}} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\tilde{V}|0\cdots 01\rangle} & \boldsymbol{=} \quad \boldsymbol{i|0\cdots 01\rangle} \\ \boldsymbol{\tilde{V}|x_0\cdots x_n\rangle} & \boldsymbol{=} \quad \boldsymbol{|x_0\cdots x_n\rangle} \quad \text{e. o. c.} \end{cases}$$

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

d) Si la configuración de las coordenadas $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ es $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{p})-(\boldsymbol{i},\boldsymbol{i})$, consideramos

$$\boxed{\boldsymbol{R}=\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{H}_n\tilde{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{H}_n} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{V}}|\mathbf{0}\cdots\mathbf{01}\rangle & = \boldsymbol{i}|\mathbf{0}\cdots\mathbf{01}\rangle \\ \tilde{\boldsymbol{V}}|\boldsymbol{x}_0\cdots\boldsymbol{x}_n\rangle & = |\boldsymbol{x}_0\cdots\boldsymbol{x}_n\rangle \quad \text{e. o. c.} \end{cases}$$

$\boldsymbol{R}$ modifica exclusivamente las coordenadas $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ del siguinete modo:

$$\begin{pmatrix} x_0+iy_0 \\ x_1+iy_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (x_0-y_0+x_1+y_1)+i(x_0+y_0-x_1+y_1) \\ (x_0-y_0-x_1-y_1)+i(x_0+y_0+x_1-y_1) \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} (x_0'-y_0'+x_1'+y_1'+1)+i(x_0'+y_0'-x_1'+y_1') \\ (x_0'-y_0'-x_1'-y_1'-1)+i(x_0'+y_0'+x_1'-y_1') \end{pmatrix}}$$

2. Estados cuánticos discretos

Demostración del teorema 1

d) Si la configuración de las coordenadas $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ es $(\boldsymbol{p},\, \boldsymbol{p}) - (\boldsymbol{i},\, \boldsymbol{i})$, consideramos

$$\boxed{\boldsymbol{R} = \tilde{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{H}_n \tilde{\boldsymbol{V}} \boldsymbol{H}_n} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{V}} |\mathbf{0} \cdots \mathbf{01}\rangle &= \boldsymbol{i} |\mathbf{0} \cdots \mathbf{01}\rangle \\ \tilde{\boldsymbol{V}} |\boldsymbol{x}_0 \cdots \boldsymbol{x}_n\rangle &= |\boldsymbol{x}_0 \cdots \boldsymbol{x}_n\rangle \quad \text{e. o. c.} \end{cases}$$

$\boldsymbol{R}$ modifica exclusivamente las coordenadas $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}$ del siguinete modo:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}_0 \\ \\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{i}\boldsymbol{y}_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1) \\ \\ (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{y}_0 - \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{y}_1) \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{y}'_0 + \boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{y}'_1 + \mathbf{1}) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}'_0 + \boldsymbol{y}'_0 - \boldsymbol{x}'_1 + \boldsymbol{y}'_1) \\ \\ (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{y}'_0 - \boldsymbol{x}'_1 - \boldsymbol{y}'_1 - \mathbf{1}) + \boldsymbol{i}(\boldsymbol{x}'_0 + \boldsymbol{y}'_0 + \boldsymbol{x}'_1 - \boldsymbol{y}'_1) \end{pmatrix}}$$

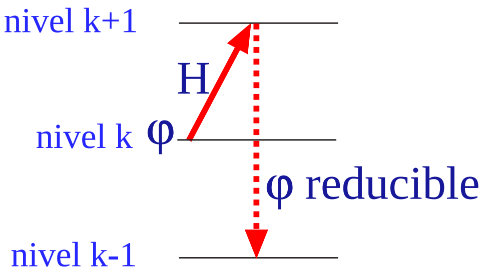
Por tanto, $\boldsymbol{R\psi}$ es reducible: $\boldsymbol{H}_n \boldsymbol{R\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}_{k-1}$

2. Estados cuánticos discretos

Propiedades de $\boldsymbol{H}$ y de $\boldsymbol{R}$

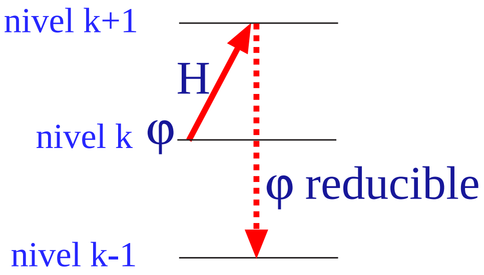
2. Estados cuánticos discretos

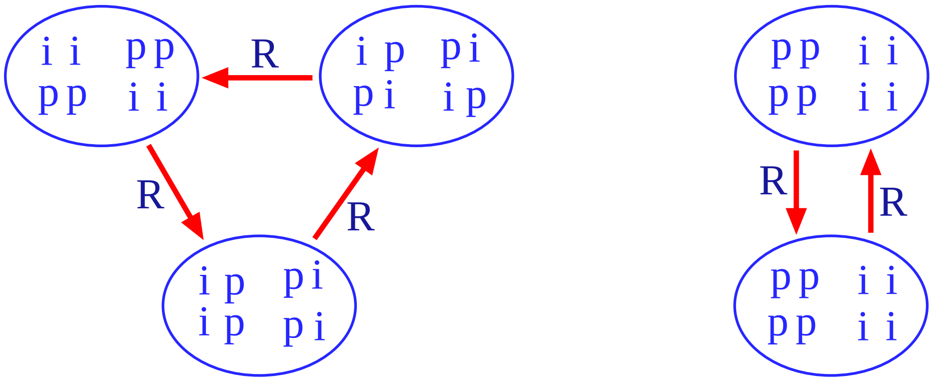
Propiedades de $\boldsymbol{H}$ y de $\boldsymbol{R}$



2. Estados cuánticos discretos

Propiedades de ***H*** y de ***R***





3. Puertas cuánticas discretas

3. Puertas cuánticas discretas

Conjunto discreto de puertas cuánticas $\boldsymbol{\mathcal{P}}$

3. Puertas cuánticas discretas

Conjunto discreto de puertas cuánticas $\boldsymbol{\mathcal{P}}$

Definición 2. Una puerta cuántica $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ si y solo si para todo $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$ se verifica

$$\boldsymbol{P\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

3. Puertas cuánticas discretas

Conjunto discreto de puertas cuánticas $\boldsymbol{\mathcal{P}}$

Definición 2. Una puerta cuántica $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ si y solo si para todo $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$ se verifica

$$\boldsymbol{P\psi \in \mathcal{E}}$$

Por ejemplo:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{6}} \begin{pmatrix} 7+2i & -2-2i & 1-i & i \\ 3 & 6+4i & 1+i & -i \\ -1-i & -1+i & 7+i & -1+3i \\ 0 & 1-i & -1+3i & 6+4i \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$$

3. Puertas cuánticas discretas

Conjunto discreto de puertas cuánticas $\boldsymbol{\mathcal{P}}$

Definición 2. Una puerta cuántica $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ si y solo si para todo $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$ se verifica

$$\boldsymbol{P\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

Por ejemplo:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^6}\begin{pmatrix} 7+2i & -2-2i & 1-i & i \\ 3 & 6+4i & 1+i & -i \\ -1-i & -1+i & 7+i & -1+3i \\ 0 & 1-i & -1+3i & 6+4i \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$$

Caracterización.

$\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ si y solo si sus columnas son estados discretos de niveles con la misma paridad.

3. Puertas cuánticas discretas

Conjunto discreto de puertas cuánticas $\boldsymbol{\mathcal{P}}$

Definición 2. Una puerta cuántica $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ si y solo si para todo $\boldsymbol{\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$ se verifica

$$\boldsymbol{P\psi} \in \boldsymbol{\mathcal{E}}$$

Por ejemplo:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^6}\begin{pmatrix} 7+2i & -2-2i & 1-i & i \\ 3 & 6+4i & 1+i & -i \\ -1-i & -1+i & 7+i & -1+3i \\ 0 & 1-i & -1+3i & 6+4i \end{pmatrix} \in \mathcal{P}$$

Caracterización.

$\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ si y solo si sus columnas son estados discretos de niveles con la misma paridad.

Propiedad. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ es un grupo multiplicativo.

3. Puertas cuánticas discretas

Conjunto universal de puertas cuánticas discretas

3. Puertas cuánticas discretas

Conjunto universal de puertas cuánticas discretas

Nota. $\boldsymbol{C}$ junto con las puertas cuánticas discretas de un qubit no lo es.

$$\text{Núm. sol. } \{\boldsymbol{x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2 = 2^k}\} = \mathbf{24} \qquad \text{para todo} \qquad \boldsymbol{k > 0}$$

3. Puertas cuánticas discretas

Conjunto universal de puertas cuánticas discretas

Nota. $\boldsymbol{C}$ junto con las puertas cuánticas discretas de un qubit no lo es.

$$\text{Núm. sol.}\,\{x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2 = 2^k\} = 24 \qquad \text{para todo} \qquad k > 0$$

Conjetura. Las puertas cuánticas discretas de dos qubits forman un conjunto universal.

3. Puertas cuánticas discretas

Conjunto universal de puertas cuánticas discretas

Nota. $\boldsymbol{C}$ junto con las puertas cuánticas discretas de un qubit no lo es.

$$\text{Núm. sol.}\,\{\boldsymbol{x_0^2+y_0^2+x_1^2+y_1^2=2^k}\}=\mathbf{24}\qquad \text{para todo}\qquad \boldsymbol{k>0}$$

Conjetura. Las puertas cuánticas discretas de dos qubits forman un conjunto universal.

Teorema 2:

Toda puerta discreta de dos qubits es producto de puertas $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{CV}$ y $\boldsymbol{TV}$.

3. Puertas cuánticas discretas

Conjunto universal de puertas cuánticas discretas

Nota. $\boldsymbol{C}$ junto con las puertas cuánticas discretas de un qubit no lo es.

$$\text{Núm. sol.}\,\{x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2 = 2^k\} = 24 \qquad \text{para todo} \qquad k > 0$$

Conjetura. Las puertas cuánticas discretas de dos qubits forman un conjunto universal.

Teorema 2:

Toda puerta discreta de dos qubits es producto de puertas $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{CV}$ y $\boldsymbol{TV}$.

Corolario de la conjetura. El modelo propuesto tiene un conjunto universal finito:

$$\boldsymbol{H,\ V,\ CV,\ TV}$$

3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Definiciones. Sea $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{a_{ij}}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}_k}$ una puerta discreta de dos qubits. Decimos que:

3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Definiciones. Sea $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{a_{ij}}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}_k}$ una puerta discreta de dos qubits. Decimos que:

a) $\boldsymbol{P}$ es reducible si sus vectores columna lo son: $\boldsymbol{H_2 P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}_{k-1}}$

3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Definiciones. Sea $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{a_{ij}}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}_k}$ una puerta discreta de dos qubits. Decimos que:

a) $\boldsymbol{P}$ es reducible si sus vectores columna lo son: $\boldsymbol{H_2 P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}_{k-1}}$

b) $\boldsymbol{P}$ es semi-reducible si la submatriz formada por las filas 3 y 4 lo es.

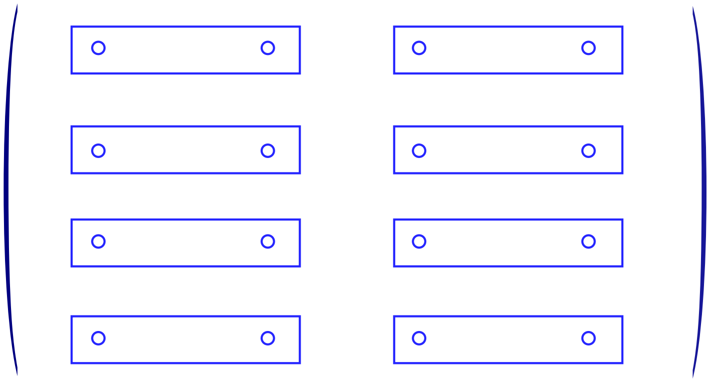
3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Definiciones. Sea $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{a_{ij}}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}_k}$ una puerta discreta de dos qubits. Decimos que:

a) $\boldsymbol{P}$ es reducible si sus vectores columna lo son: $\boldsymbol{H_2 P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}_{k-1}}$

b) $\boldsymbol{P}$ es semi-reducible si la submatriz formada por las filas 3 y 4 lo es.



f-estándar

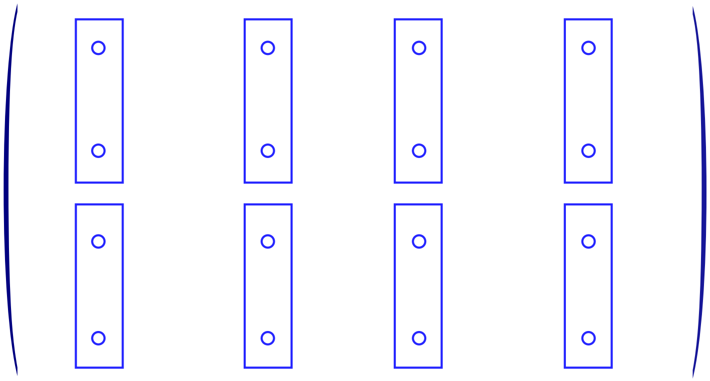
3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Definiciones. Sea $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{a_{ij}}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}_k}$ una puerta discreta de dos qubits. Decimos que:

a) $\boldsymbol{P}$ es reducible si sus vectores columna lo son: $\boldsymbol{H_2 P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}_{k-1}}$

b) $\boldsymbol{P}$ es semi-reducible si la submatriz formada por las filas 3 y 4 lo es.



c-estándar

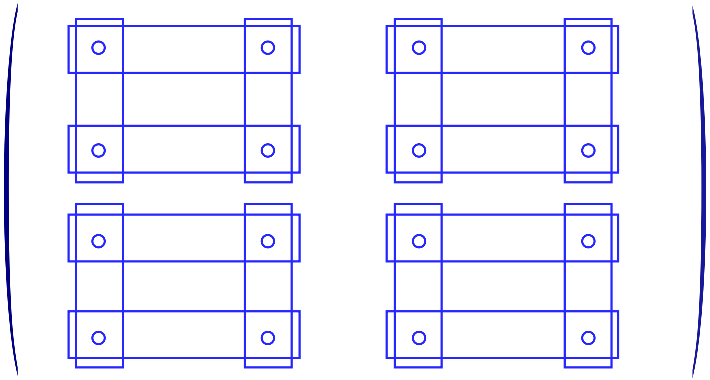
3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Definiciones. Sea $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{a}_{ij}) \in \mathcal{P}_k$ una puerta discreta de dos qubits. Decimos que:

a) $\boldsymbol{P}$ es reducible si sus vectores columna lo son: $\boldsymbol{H_2 P} \in \mathcal{P}_{k-1}$

b) $\boldsymbol{P}$ es semi-reducible si la submatriz formada por las filas 3 y 4 lo es.



estándar

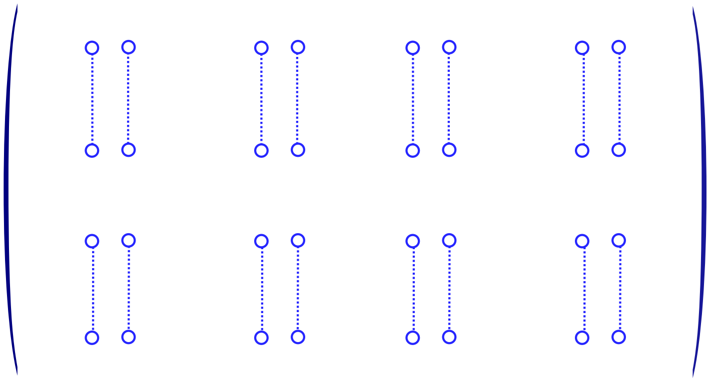
3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Definiciones. Sea $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{a}_{ij}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}_k}$ una puerta discreta de dos qubits. Decimos que:

a) $\boldsymbol{P}$ es reducible si sus vectores columna lo son: $\boldsymbol{H_2 P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}_{k-1}}$

b) $\boldsymbol{P}$ es semi-reducible si la submatriz formada por las filas 3 y 4 lo es.



reducible

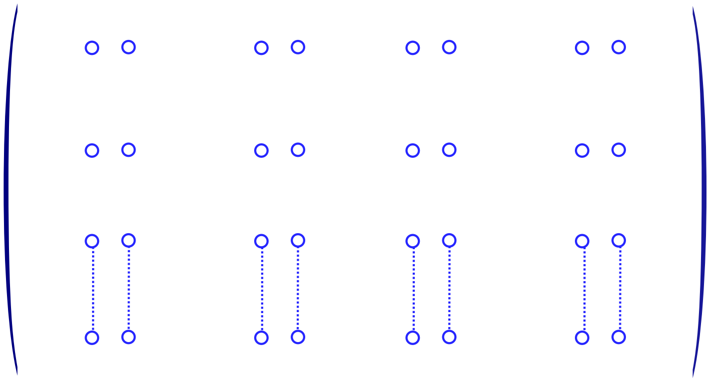
3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Definiciones. Sea $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{a_{ij}}) \in \boldsymbol{\mathcal{P}_k}$ una puerta discreta de dos qubits. Decimos que:

a) $\boldsymbol{P}$ es reducible si sus vectores columna lo son: $\boldsymbol{H_2 P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}_{k-1}}$

b) $\boldsymbol{P}$ es semi-reducible si la submatriz formada por las filas 3 y 4 lo es.



semi-reducible

3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Propiedades. Sea $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ una puerta discreta de dos qubits. Entonces se cumple que:

3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Propiedades. Sea $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ una puerta discreta de dos qubits. Entonces se cumple que:

a) En toda fila (columna) de $\boldsymbol{P}$ el número de componentes impares es par.

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} \mathrm{Re}^2(a_{ij}) + \mathrm{Im}^2(a_{ij}) = 2^k$$

3. Puertas cuánticas discretas

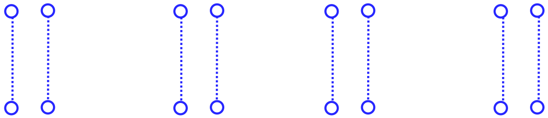
Sobre la demostración del teorema 2

Propiedades. Sea $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ una puerta discreta de dos qubits. Entonces se cumple que:

a) En toda fila (columna) de $\boldsymbol{P}$ el número de componentes impares es par.

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} \mathrm{Re}^2(a_{ij}) + \mathrm{Im}^2(a_{ij}) = 2^k$$

b) En todo par de filas el núm. de coincidencias de comp. impares es par.



3. Puertas cuánticas discretas

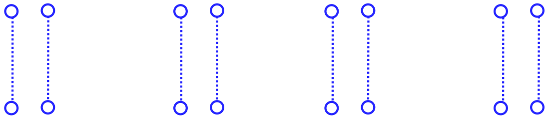
Sobre la demostración del teorema 2

Propiedades. Sea $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ una puerta discreta de dos qubits. Entonces se cumple que:

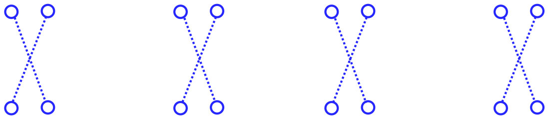
a) En toda fila (columna) de $\boldsymbol{P}$ el número de componentes impares es par.

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} \mathrm{Re}^2(a_{ij}) + \mathrm{Im}^2(a_{ij}) = 2^k$$

b) En todo par de filas el núm. de coincidencias de comp. impares es par.



c) En todo par de filas el núm. de coincidencias cruzadas de comp. impares es par.



3. Puertas cuánticas discretas

Sobre la demostración del teorema 2

Lema 1. Sea $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ una puerta discreta de dos qubits. Entonces, permutando filas y columnas, $\boldsymbol{P}$ se puede transformar en forma estándar.

Lema 2. Sea $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ una puerta discreta de dos qubits semi-reducible. Entonces $\boldsymbol{P}$ se puede transformar en reducible.

Lema 3. Sea $\boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ una puerta discreta de dos qubits. Entonces $\boldsymbol{P}$ se puede transformar en semi-reducible.

¡Gracias por su atención!