Semigrupos afines convexos

I. García M.A. Moreno A. Sánchez A. Vigneron

Universidad de Cádiz

VII Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica
Almería
Julio 11-13, 2012

- **Semigrupos afines convexos**

semigrupos proporcionalmente modulares

J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, J. I. García-García, J. M. Urbano-Blanco, *Proportionally modular Diophantine inequalities,* J. Number Theory 103, 281–294 (2003).

- Affine Convex body semigroups

arxiv.org/abs/1203.2129v1

- **Semigrupos afines convexos**

semigrupos proporcionalmente modulares

J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, J. I. García-García, J. M. Urbano-Blanco, *Proportionally modular Diophantine inequalities,* J. Number Theory 103, 281–294 (2003).

- Affine Convex body semigroups

arxiv.org/abs/1203.2129v1

• **Semigrupos afines convexos**

semigrupos proporcionalmente modulares

J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, J. I. García-García, J. M. Urbano-Blanco, *Proportionally modular Diophantine inequalities,* J. Number Theory 103, 281–294 (2003).

• Affine Convex body semigroups
arxiv.org/abs/1203.2129v1

- **Semigrupos afines convexos**

semigrupos proporcionalmente modulares

J. C. Rosales, P. A. García-Sánchez, J. I. García-García, J. M. Urbano-Blanco, *Proportionally modular Diophantine inequalities,* J. Number Theory 103, 281–294 (2003).

- Affine Convex body semigroups

arxiv.org/abs/1203.2129v1

Notaciones

$\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq \mathbb{N}^k$,
$S = \langle a_1, \dots, a_r \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r \,|\, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{N}\}$.
Sistema minimal de generadores
Todo semigrupo afín admite un único sistema minimal de generadores.(J.C. ROSALES, P.A. GARCÍA-SÁNCHEZ, *Finitely generated commutative monoids*, Nova Science Publishers, Inc., New York (1999).).
Cono generado por $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\geq}$,

$$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} q_i a_i | p \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{\geq}, a_i \in A \right\}.$$

Un rayo es una línea conteniendo el origen, O, de $\mathbb{R}^k$.
$A \subseteq \mathbb{R}^2_+$, τ_1 y τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A)$ ($\tau_1 > \tau_2$),

Notaciones

$\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq \mathbb{N}^k$,

$S = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{N}\}$.

Sistema minimal de generadores

Todo semigrupo afín admite un único sistema minimal de generadores.(J.C. Rosales, P.A. García-Sánchez, *Finitely generated commutative monoids*, Nova Science Publishers, Inc., New York (1999).).

Cono generado por $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\geq}$,

$$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} q_i a_i | p \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{\geq}, a_i \in A \right\}.$$

Un rayo es una línea conteniendo el origen, O, de $\mathbb{R}^k$.

$A \subseteq \mathbb{R}^2_+$, τ_1 y τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A)$ ($\tau_1 > \tau_2$),

Notaciones

$\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq \mathbb{N}^k$,
$S = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r | \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{N}\}$.

Sistema minimal de generadores

Todo semigrupo afín admite un único sistema minimal de generadores.(J.C. Rosales, P.A. García-Sánchez, *Finitely generated commutative monoids*, Nova Science Publishers, Inc., New York (1999).).

Cono generado por $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\geq}$,

$$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} q_i a_i | p \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{\geq}, a_i \in A \right\}.$$

Un rayo es una línea conteniendo el origen, O, de $\mathbb{R}^k$.
$A \subseteq \mathbb{R}^2_+$, τ_1 y τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A)$ ($\tau_1 > \tau_2$),

Notaciones

$\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq \mathbb{N}^k$,
$S = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r | \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{N}\}$.
Sistema minimal de generadores
Todo semigrupo afín admite un único sistema minimal de generadores.(J.C. Rosales, P.A. García-Sánchez, *Finitely generated commutative monoids*, Nova Science Publishers, Inc., New York (1999).).
Cono generado por $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\geq}$,

$$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} q_i a_i | p \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{\geq}, a_i \in A \right\}.$$

Un rayo es una línea conteniendo el origen, O, de $\mathbb{R}^k$.
$A \subseteq \mathbb{R}^2_+$, τ_1 y τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A)$ ($\tau_1 > \tau_2$),

Notaciones

$\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq \mathbb{N}^k$,
$S = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r | \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{N}\}$.
Sistema minimal de generadores
Todo semigrupo afín admite un único sistema minimal de generadores.(J.C. ROSALES, P.A. GARCÍA-SÁNCHEZ, *Finitely generated commutative monoids,* Nova Science Publishers, Inc., New York (1999).).
Cono generado por $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\geq}$,

$$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} q_i a_i | p \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{\geq}, a_i \in A \right\}.$$

Un rayo es una línea conteniendo el origen, O, de $\mathbb{R}^k$.
$A \subseteq \mathbb{R}^2_+$, τ_1 y τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A)$ ($\tau_1 > \tau_2$),

Notaciones

$\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq \mathbb{N}^k$,
$S = \langle a_1, \dots, a_r \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r | \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{N}\}$.
Sistema minimal de generadores
Todo semigrupo afín admite un único sistema minimal de generadores.(J.C. ROSALES, P.A. GARCÍA-SÁNCHEZ, *Finitely generated commutative monoids*, Nova Science Publishers, Inc., New York (1999).).
Cono generado por $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\geq}$,

$$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} q_i a_i | p \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{\geq}, a_i \in A \right\}.$$

Un rayo es una línea conteniendo el origen, O, de $\mathbb{R}^k$.
$A \subseteq \mathbb{R}^2_+$, τ_1 y τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A)$ ($\tau_1 > \tau_2$),

Notaciones

$\{a_1, \ldots, a_r\} \subseteq \mathbb{N}^k$,
$S = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{N}\}$.
Sistema minimal de generadores
Todo semigrupo afín admite un único sistema minimal de generadores.(J.C. Rosales, P.A. García-Sánchez, *Finitely generated commutative monoids,* Nova Science Publishers, Inc., New York (1999).).
Cono generado por $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\geq}$,

$$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} q_i a_i | p \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{\geq}, a_i \in A \right\}.$$

Un rayo es una línea conteniendo el origen, O, de $\mathbb{R}^k$.
$A \subseteq \mathbb{R}^2_+$, τ_1 y τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A)$ ($\tau_1 > \tau_2$),

Notaciones

$\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq \mathbb{N}^k$,
$S = \langle a_1, \dots, a_r \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r | \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{N}\}$.
Sistema minimal de generadores
Todo semigrupo afín admite un único sistema minimal de generadores.(J.C. Rosales, P.A. García-Sánchez, *Finitely generated commutative monoids,* Nova Science Publishers, Inc., New York (1999).).
Cono generado por $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\geq}$,

$$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} q_i a_i | p \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{\geq}, a_i \in A \right\}.$$

Un rayo es una línea conteniendo el origen, O, de $\mathbb{R}^k$.
$A \subseteq \mathbb{R}^2_+$, τ_1 y τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A)$ ($\tau_1 > \tau_2$),

Notaciones

$\{a_1, \dots, a_r\} \subseteq \mathbb{N}^k$,
$S = \langle a_1, \dots, a_r \rangle = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r | \, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{N}\}$.
Sistema minimal de generadores
Todo semigrupo afín admite un único sistema minimal de generadores.(J.C. Rosales, P.A. García-Sánchez, *Finitely generated commutative monoids*, Nova Science Publishers, Inc., New York (1999).).
Cono generado por $A \subseteq \mathbb{R}^k_{\geq}$,

$$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} q_i a_i | p \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}_{\geq}, a_i \in A \right\}.$$

Un rayo es una línea conteniendo el origen, O, de $\mathbb{R}^k$.
$A \subseteq \mathbb{R}^2_+$, τ_1 y τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(A)$ ($\tau_1 > \tau_2$),

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C=$(1,3)$, r= 5,
$F_2 \equiv$ Círculo, C=$(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r= $2 \cdot 5$
$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, **F** submonoide de $\mathbb{R}^k$, **F** submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0),(0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0)+(0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C=$(1,3)$, r= 5,

$F_2 \equiv$ Círculo, C=$(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r= $2 \cdot 5$

$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}_{\geq}^k$, $\mathbf{F}$ submonoide de $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}$ submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}_+^2 | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0), (0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0) + (0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C$=(1,3)$, r$=5$,
$F_2 \equiv$ Círculo, C$=(2\cdot 1, 2\cdot 3)$, r$=2\cdot 5$
$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, **F** submonoide de $\mathbb{R}^k$, **F** submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0),(0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0)+(0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C=$(1, 3)$, r= 5,

$F_2 \equiv$ Círculo, C=$(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r= $2 \cdot 5$

$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, **F** submonoide de $\mathbb{R}^k$, **F** submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4, 0), (0, 4) \in \mathbf{F}$, pero $(4, 0) + (0, 4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C=$(1,3)$, r= 5,

$F_2 \equiv$ Círculo, C=$(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r= $2 \cdot 5$

$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, $\mathbf{F}$ submonoide de $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}$ submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0),(0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0)+(0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C$=(1,3)$, r$=5$,

$F_2 \equiv$ Círculo, C$=(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r$=2 \cdot 5$

$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, $\mathbf{F}$ submonoide de $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}$ submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0),(0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0)+(0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C$=(1,3)$, r$=5$,

$F_2 \equiv$ Círculo, C$=(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r$=2 \cdot 5$

$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, $\mathbf{F}$ submonoide de $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}$ submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0), (0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0) + (0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C$=(1,3)$, r$=5$,
$F_2 \equiv$ Círculo, C$=(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r$=2 \cdot 5$
$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, $\mathbf{F}$ submonoide de $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}$ submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0), (0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0) + (0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C=$(1,3)$, r= 5,

$F_2 \equiv$ Círculo, C=$(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r= $2 \cdot 5$

$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, **F** submonoide de $\mathbb{R}^k$, **F** submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0), (0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0) + (0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C$=(1,3)$, r$=5$,
$F_2 \equiv$ Círculo, C$=(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r$=2 \cdot 5$
$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, $\mathbf{F}$ submonoide de $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}$ submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0),(0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0)+(0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C$=(1,3)$, r$=5$,
$F_2 \equiv$ Círculo, C$=(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r$=2 \cdot 5$
$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, $\mathbf{F}$ submonoide de $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}$ submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0),(0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0)+(0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C$=(1,3)$, r$=5$,

$F_2 \equiv$ Círculo, C$=(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r$= 2 \cdot 5$

$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, **F** submonoide de $\mathbb{R}^k$, **F** submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0),(0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0)+(0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C=$(1,3)$, r= 5,
$F_2 \equiv$ Círculo, C=$(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r= $2 \cdot 5$
$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, **F** submonoide de $\mathbb{R}^k$, **F** submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0), (0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0) + (0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C$=(1,3)$, r$= 5$,
$F_2 \equiv$ Círculo, C$=(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r$= 2 \cdot 5$
$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}^k_{\geq}$, $\mathbf{F}$ submonoide de $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{F}$ submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}^2_+ | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0), (0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0) + (0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos convexos

$F \subseteq \mathbb{R}^k$, convexo y compacto, $F_i = \{iX | X \in F\}$ con $i \in \mathbb{N}$.

$F \equiv$ Círculo, C=$(1,3)$, r= 5,
$F_2 \equiv$ Círculo, C=$(2 \cdot 1, 2 \cdot 3)$, r= $2 \cdot 5$
$\mathbf{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \cap \mathbb{R}_{\geq}^k$, **F** submonoide de $\mathbb{R}^k$, **F** submonoide convexo.

F no es convexo, $\{X \in \mathbb{R}_+^2 | 3 \leq \mathrm{d}(X) \leq 5\}$, $(4,0), (0,4) \in \mathbf{F}$, pero $(4,0) + (0,4) \notin \mathbf{F}$.

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo de $\mathbb{N}^k$, $\mathcal{F}$ semigrupo convexo.

No pueden expresarse utilizando ecuaciones diofánticas,

Lemma

Sea τ un rayo con pendiente no negativa. Entonces, para todo $X \in \mathbf{F} \cap \tau$ existen $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$, $1 < a < b$, tal que

$$a \cdot \mathrm{d}(X) \mod b \leq \mathrm{d}(X).$$

Semigrupos poligonales convexos

$P_i = (p_{i1}, p_{i2}),\ i = 1, \dots, n$
los vértices de un polígono convexo y compacto $F \subset \mathbb{R}^2_{\geq}$, τ_1, τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$, $\mathcal{F}$ semigroup convexo

Semigrupos poligonales convexos

$P_i = (p_{i1}, p_{i2}),\ i = 1, \ldots, n$
los vértices de un polígono convexo y compacto $F \subset \mathbb{R}^2_{\geq}$, τ_1, τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$, $\mathcal{F}$ semigroup convexo

Semigrupos poligonales convexos

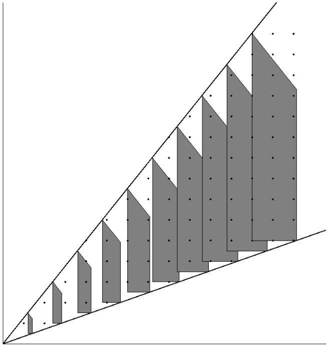
$P_i = (p_{i1}, p_{i2})$, $i = 1, \dots, n$
los vértices de un polígono convexo y compacto $F \subset \mathbb{R}^2_{\geq}$, τ_1, τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$, $\mathcal{F}$ semigroup convexo

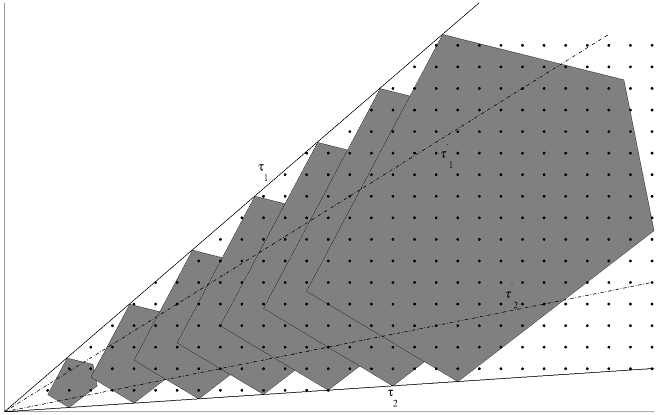
Semigrupos poligonales convexos

$P_i = (p_{i1}, p_{i2})$, $i = 1, \ldots, n$
los vértices de un polígono convexo y compacto $F \subset \mathbb{R}^2_{\geq}$, τ_1, τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$, $\mathcal{F}$ semigroup convexo

Semigrupos poligonales convexos

$P_i = (p_{i1}, p_{i2}),\ i = 1, \ldots, n$
los vértices de un polígono convexo y compacto $F \subset \mathbb{R}^2_{\geq}$, τ_1, τ_2 los rayos extremales de $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$, $\mathcal{F}$ semigroup convexo




τ_1
τ_1
τ_2
τ_2

Theorem

El semigrupo $\mathcal{F}$ es finitamente generado si y sólo si $F \cap \tau_1$ y $F \cap \tau_2$ contiene puntos racionales. Además, en ese caso existe un algoritmo para calcular el sistema minimal de generadores de $\mathcal{F}$.

F convexo, compacto de $\mathbb{R}^2_{\geq}$, $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$
$\mathbf{F} \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$,
$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F) \cap \mathbb{N}^k$.

Lemma

Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo finitamente generado y $A \subset \mathcal{S}$ un conjunto finito. Si $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo, entonces $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo finitamente generado. Además existe un algoritmo para calcular un sistema generador de $\mathcal{S} \setminus A$.

F convexo, compacto de $\mathbb{R}^2_{\geq}$, $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$
$\mathbf{F} \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$,
$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F) \cap \mathbb{N}^k$.

Lemma

Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo finitamente generado y $A \subset \mathcal{S}$ un conjunto finito. Si $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo, entonces $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo finitamente generado. Además existe un algoritmo para calcular un sistema generador de $\mathcal{S} \setminus A$.

F convexo, compacto de $\mathbb{R}^2_{\geq}$, $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$

$\mathbf{F} \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$,

$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F) \cap \mathbb{N}^k$.

Lemma

Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo finitamente generado y $A \subset \mathcal{S}$ un conjunto finito. Si $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo, entonces $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo finitamente generado. Además existe un algoritmo para calcular un sistema generador de $\mathcal{S} \setminus A$.

F convexo, compacto de $\mathbb{R}^2_{\geq}$, $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$
$\mathbf{F} \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$,
$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F) \cap \mathbb{N}^k$.

Lemma

Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo finitamente generado y $A \subset \mathcal{S}$ un conjunto finito. Si $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo, entonces $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo finitamente generado. Además existe un algoritmo para calcular un sistema generador de $\mathcal{S} \setminus A$.

F convexo, compacto de $\mathbb{R}^2_{\geq}$, $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$
$\mathbf{F} \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$,
$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F) \cap \mathbb{N}^k$.

Lemma

Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo finitamente generado y $A \subset \mathcal{S}$ un conjunto finito. Si $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo, entonces $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo finitamente generado. Además existe un algoritmo para calcular un sistema generador de $\mathcal{S} \setminus A$.

F convexo, compacto de $\mathbb{R}^2_{\geq}$, $L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$
$\mathbf{F} \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F)$,
$\mathcal{F} = \mathbf{F} \cap \mathbb{N}^k \subseteq L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(F) \cap \mathbb{N}^k$.

Lemma

Sea $\mathcal{S}$ un semigrupo finitamente generado y $A \subset \mathcal{S}$ un conjunto finito. Si $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo, entonces $\mathcal{S} \setminus A$ es un semigrupo finitamente generado. Además existe un algoritmo para calcular un sistema generador de $\mathcal{S} \setminus A$.

Semigrupos círculos

Sea C el círculo de centro (a, b) y radio r.
C_i el círculo con centro (ia, ib) y radio ir,
$\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i \cap \mathbb{N}^2$ el semigrupo generado por C.

Semigrupos círculos

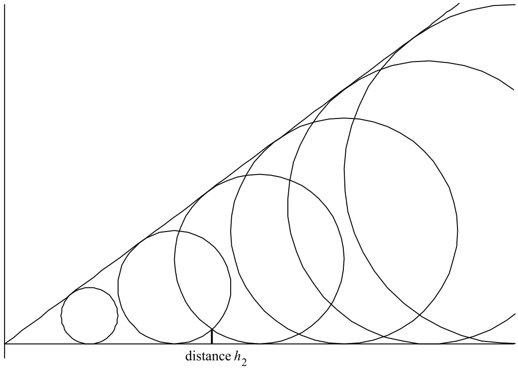
Sea C el círculo de centro (a, b) y radio r.
C_i el círculo con centro (ia, ib) y radio ir,
$\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i \cap \mathbb{N}^2$ el semigrupo generado por C.

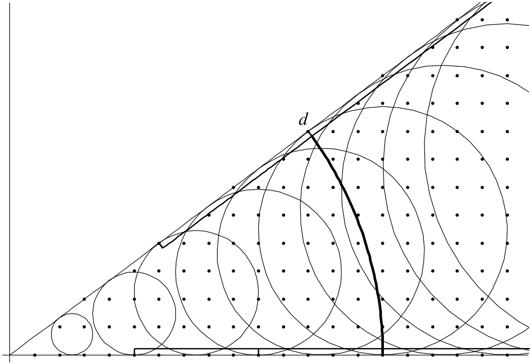
Semigrupos círculos

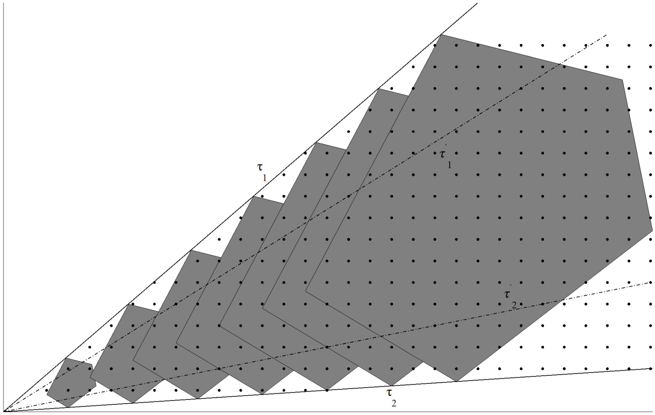
Sea C el círculo de centro (a, b) y radio r.
C_i el círculo con centro (ia, ib) y radio ir,
$\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i \cap \mathbb{N}^2$ el semigrupo generado por C.

Semigrupos círculos

Sea C el círculo de centro (a, b) y radio r.
C_i el círculo con centro (ia, ib) y radio ir,
$\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} C_i \cap \mathbb{N}^2$ el semigrupo generado por C.


distance h_2


d


τ_1
τ_1
τ_2
τ_2

Lemma

Supongamos que $C \cap \tau_2$ es un punto. Si $P_i \in \tau_2$, $P_i \in C_i \cap C_{i+1}$, entonces $\lim_{i \to \infty} \mathrm{d}(P_i, \tau_2) = 0$.

Lemma

Sea $C \subset \mathbb{R}^2_{\geq}$ un círculo. Entonces existe $d \in \mathbb{R}_{\geq}$ tal que

$$\{P \in \mathrm{int}(\mathcal{C}) | \mathrm{d}(P) > d\} \subset \mathcal{S}.$$

Además, d puede calcularse algorítmicamente.

Lemma

Supongamos que $C \cap \tau_2$ es un punto. Si $P_i \in \tau_2$, $P_i \in C_i \cap C_{i+1}$, entonces $\lim_{i \to \infty} \mathrm{d}(P_i, \tau_2) = 0$.

Lemma

Sea $C \subset \mathbb{R}^2_{\geq}$ un círculo. Entonces existe $d \in \mathbb{R}_{\geq}$ tal que

$$\{P \in \mathrm{int}(\mathcal{C}) | \mathrm{d}(P) > d\} \subset \mathcal{S}.$$

Además, d puede calcularse algorítmicamente.

Lemma

Supongamos que $C \cap \tau_2$ es un punto. Si $P_i \in \tau_2$, $P_i \in C_i \cap C_{i+1}$, entonces $\lim_{i\to\infty} \mathrm{d}(P_i, \tau_2) = 0$.

Lemma

Sea $C \subset \mathbb{R}^2_{\geq}$ un círculo. Entonces existe $d \in \mathbb{R}_{\geq}$ tal que

$$\{P \in \mathrm{int}(\mathcal{C}) | \mathrm{d}(P) > d\} \subset \mathcal{S}.$$

Además, d puede calcularse algorítmicamente.

Lemma

Supongamos que $C \cap \tau_2$ *es un punto. Si* $P_i \in \tau_2$, $P_i \in C_i \cap C_{i+1}$, *entonces* $\lim_{i \to \infty} \mathrm{d}(P_i, \tau_2) = 0$.

Lemma

Sea $C \subset \mathbb{R}^2_{\geq}$ *un círculo. Entonces existe* $d \in \mathbb{R}_{\geq}$ *tal que*

$$\{P \in \mathrm{int}(\mathcal{C}) | \mathrm{d}(P) > d\} \subset \mathcal{S}.$$

Además, d *puede calcularse algorítmicamente.*

Theorem

El semigrupo $\mathcal{F}$ es finitamente generado si y sólo si $C \cap \tau_1$ and $C \cap \tau_2$ tiene puntos racionales. Además, en este caso el sistema minimal de generadores de $\mathcal{F}$ puede calcularse algorítmicamente.

Theorem

El semigrupo $\mathcal{F}$ es finitamente generado si y sólo si $C \cap \tau_1$ and $C \cap \tau_2$ tiene puntos racionales. Además, en este caso el sistema minimal de generadores de $\mathcal{F}$ puede calcularse algorítmicamente.

Lemma

Sea $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. *El elemento* $(x, y) \in \mathcal{F}$ *si y sólo si* $(x, y) \in C_k \cup C_{k+1}$ *con* $k = \left\lfloor \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2}} \right\rfloor \in \mathbb{N}$.

Lemma

Sea $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. *El elemento* $(x, y) \in \mathcal{F}$ *si y sólo si*

$$(x, y) \in C_k \cup C_{k+1} \text{ con } k = \left\lfloor \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2 + b^2}} \right\rfloor \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo

C, centro $(7/3, 4/3)$, radio $1/3$.
$L_{\mathbb{Q}_\geq}(C) \cap \mathbb{N}^2$. Este cono está mínimamente generado por

$$\{(4,3),(12,5),(2,1),(3,2),(7,3)\}.$$

Sistema de generadores de $\mathcal{F}$

$$\{(5,3),(6,4),(7,3),(7,4),(7,5),(8,4),(9,5),(9,6),(10,5),(11,6),(11,8),(13,6),$$

$$(15,11),(18,8),(19,14),(23,10),(23,17),(27,20),(31,23),(32,24),(33,14),(35,26),$$

$$(38,16),(50,21),(55,23),(67,28),(79,33),(91,38),(96,40),(115,48),(127,53),(139,58)\}.$$

Ejemplo

C, centro $(7/3, 4/3)$, radio $1/3$.

$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(C) \cap \mathbb{N}^2$. Este cono está mínimamente generado por

$$\{(4,3),(12,5),(2,1),(3,2),(7,3)\}.$$

Sistema de generadores de $\mathcal{F}$

$$\{(5,3),(6,4),(7,3),(7,4),(7,5),(8,4),(9,5),(9,6),(10,5),(11,6),(11,8),(13,6),$$

$$(15,11),(18,8),(19,14),(23,10),(23,17),(27,20),(31,23),(32,24),(33,14),(35,26),$$

$$(38,16),(50,21),(55,23),(67,28),(79,33),(91,38),(96,40),(115,48),(127,53),(139,58)\}.$$

Ejemplo

C, centro $(7/3, 4/3)$, radio $1/3$.
$L_{\mathbb{Q}_{\geq}}(C) \cap \mathbb{N}^2$. Este cono está mínimamente generado por

$$\{(4,3),(12,5),(2,1),(3,2),(7,3)\}.$$

Sistema de generadores de $\mathcal{F}$

$$\{(5,3),(6,4),(7,3),(7,4),(7,5),(8,4),(9,5),(9,6),(10,5),(11,6),(11,8),(13,6),$$

$$(15,11),(18,8),(19,14),(23,10),(23,17),(27,20),(31,23),(32,24),(33,14),(35,26),$$

$$(38,16),(50,21),(55,23),(67,28),(79,33),(91,38),(96,40),(115,48),(127,53),(139,58)\}.$$

Ejemplo

C, centro $(7/3, 4/3)$, radio $1/3$.
$L_{\mathbb{Q}_\geq}(C) \cap \mathbb{N}^2$. Este cono está mínimamente generado por

$$\{(4,3),(12,5),(2,1),(3,2),(7,3)\}.$$

Sistema de generadores de $\mathcal{F}$

$$\{(5,3),(6,4),(7,3),(7,4),(7,5),(8,4),(9,5),(9,6),(10,5),(11,6),(11,8),(13,6),$$
$$(15,11),(18,8),(19,14),(23,10),(23,17),(27,20),(31,23),(32,24),(33,14),(35,26),$$
$$(38,16),(50,21),(55,23),(67,28),(79,33),(91,38),(96,40),(115,48),(127,53),(139,58)\}.$$

Ejemplo

C, centro $(7/3, 4/3)$, radio $1/3$.
$L_{\mathbb{Q}_\geq}(C) \cap \mathbb{N}^2$. Este cono está mínimamente generado por

$$\{(4,3),(12,5),(2,1),(3,2),(7,3)\}.$$

Sistema de generadores de $\mathcal{F}$

$$\{(5,3),(6,4),(7,3),(7,4),(7,5),(8,4),(9,5),(9,6),(10,5),(11,6),(11,8),(13,6),$$

$$(15,11),(18,8),(19,14),(23,10),(23,17),(27,20),(31,23),(32,24),(33,14),(35,26),$$

$$(38,16),(50,21),(55,23),(67,28),(79,33),(91,38),(96,40),(115,48),(127,53),(139,58)\}.$$

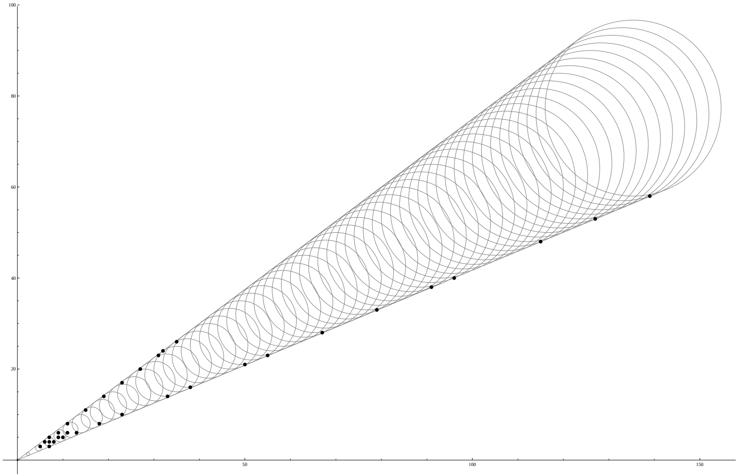
Ejemplo

C, centro $(7/3, 4/3)$, radio $1/3$.
$L_{\mathbb{Q}_\geq}(C) \cap \mathbb{N}^2$. Este cono está mínimamente generado por

$$\{(4,3),(12,5),(2,1),(3,2),(7,3)\}.$$

Sistema de generadores de $\mathcal{F}$

$$\{(5,3),(6,4),(7,3),(7,4),(7,5),(8,4),(9,5),(9,6),(10,5),(11,6),(11,8),(13,6),$$
$$(15,11),(18,8),(19,14),(23,10),(23,17),(27,20),(31,23),(32,24),(33,14),(35,26),$$
$$(38,16),(50,21),(55,23),(67,28),(79,33),(91,38),(96,40),(115,48),(127,53),(139,58)\}.$$


100
80
60
40
20
50
100
150

`circle_semigroup`

`http://www.uca.es/dpto/C101/pags-personales/alberto.vigneron/circle_semigroup.rar`

Wolfram Mathematica 7

`circle_semigroup`

http://www.uca.es/dpto/C101/pags-personales/alberto.vigneron/circle_semigroup.rar

Wolfram Mathematica 7

`circle_semigroup`

`http://www.uca.es/dpto/C101/pags-personales/alberto.vigneron/circle_semigroup.rar`

Wolfram Mathematica 7

`circle_semigroup`

`http://www.uca.es/dpto/C101/pags-personales/alberto.vigneron/circle_semigroup.rar`

Wolfram Mathematica 7

¡¡MUCHAS GRACIAS!!